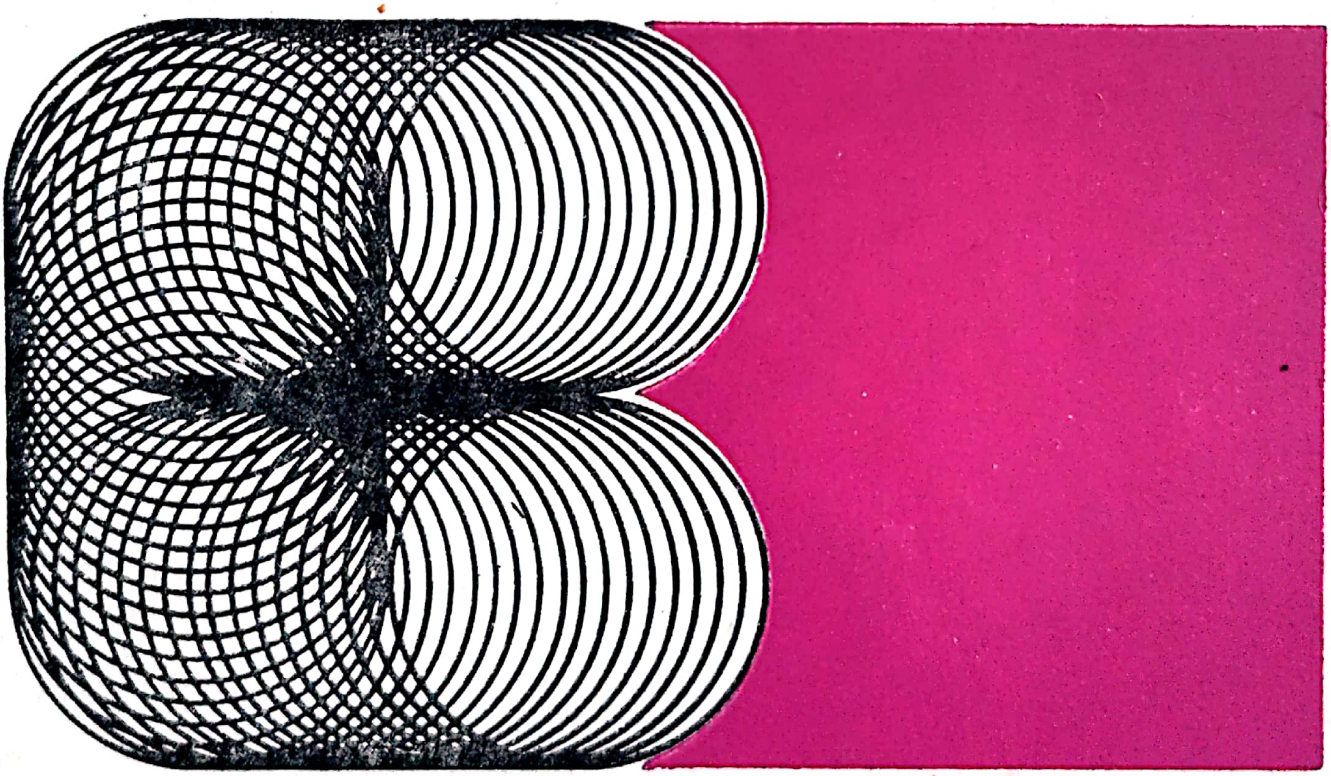
ANALIZĂ MODERNĂ ȘI APLICAȚII

Gheorghe Moroșanu

ECUAȚII NELINIARE DE EVOLUȚIE ȘI APLICAȚII



EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

COLECȚIA: ANALIZĂ MODERNĂ ȘI APLICAȚII

GHEORGHE MOROȘANU

ECUAȚII NELINIARE DE EVOLUȚIE ȘI APLICAȚII

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREȘTI, 1986

Scanned with OKEN Scanner

Nonlinear evolution equations and applications

Нелинейные эволюционные уравнения и приложения

Redactor: PETRE MOCANU
Tehnoredactor: ELENA SPIRU
Coperta: EUGEN STOIAN

Bun de tipar: 10.02.1986. Format 16/70×100.
Coli de tipar: 13.
C.Z. pentru biblioteci mari și mici: 517.9

I.P. Informația c-da nr. 372
Str. Brezoianu
23—25 București

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
R. 79717 București, Calea Victoriei nr. 125, Sectorul 1

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Teoria ecuațiilor cu derivate parțiale a rămas unul din principalele domenii de aplicații ale analizei funcționale și teoriei operatorilor. Rezultate de finețe și profunzime cum ar fi cele de analiză spectrală, din teoria lui Leray-Schauder a gradului topologic, analiza armonică, teoria distribuțiilor sau cea a operatorilor maximal monotoni au găsit aplicații frumoase în diverse capitole ale ecuațiilor cu derivate parțiale influențînd considerabil dezvoltarea acestor discipline. În aceeași categorie intră și teoria semigrupurilor de operatori liniari fundamentată independent de E. Hille și K. Yosida în deceniul patru și dezvoltată apoi și prin contribuțiile unor matematicieni cum ar fi : T. Kato, R. Philips, J. L. Lions și alții. Teoria semigrupurilor de operatori liniari a permis tratarea cu succes și în mod unitar a unor clase aparent îndepărtate de ecuații liniare nestaționare cu derivate parțiale și de tip funcțional cum ar fi : ecuațiile parabolice și hiperbolice cu condiții inițiale și condiții omogene pe frontieră, ecuația de transport, sistemele hiperbolice de ordinul întîi, ecuațiile cu întîrziere. De altfel, lista ar putea fi continuată cu numeroase alte aplicații importante și posibilitățile teoriei nu s-au epuizat încă. Acordînd variabilei timp un rol preferențial, metoda semigrupală permite reprezentarea unor asemenea probleme ca ecuații liniare de evoluție într-un spațiu Banach de forma

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t), \qquad t > 0$$

$$y(0) = y_0.$$

Condițiile la limită sînt încorporate în condiția implicită ca necunoscuta $y(t)$ să aparțină domeniului operatorului A. Scrise în acest mod, problemele la limită parabolice sau hiperbolice apar ca generalizări naturale ale sistemelor diferențiale ordinare de care diferă doar prin complexitate.

Extinderea teoriei lui Hille-Yosida la cazul neliniar a început printr-o lucrare a lui Y. Komura din anul 1967 în care se arată că teorema de generare a lui Hille-Yosida se menține adevărată în spații Hilbert în cazul semigrupurilor continue de operatori contractanți. Acesta a fost punctul de plecare a unei teorii fecunde cunoscute astăzi în literatură sub denumirea de teoria semigrupurilor neliniare *și în care au adus contribuții fundamentale T. Kato, M. G. Crandall, A. Pazy, H. Brézis, F. Browder, Ph. Bénilan, printre alții. Succesele înregistrate în tratarea unor ecuații parabolice neliniare complexe cît și a unor probleme nestaționare cu frontieră liberă reprezentate de inegalități variaționale parabolice au impus metoda în literatură.*

Scanned with OKEN Scanner

O primă etapă în dezvoltarea acestei teorii are în vedere existența și aproximarea soluțiilor ecuațiilor neliniare de evoluție asociate cu operatori monotoni și se orientează în direcția obținerii unor rezultate de generare cît mai fine.

Studiul aprofundat al stabilității și comportării la infinit a soluțiilor ecuațiilor neliniare de evoluție reprezintă o etapă ulterioară a dezvoltării teoriei și în care au adus contribuții importante mai mulți autori, printre care: C. Dafermos, M. Slemrod, R. E. Bruck, J. B. Baillon, A. Pazy.

Monografia de față este consacrată în principal prezentării celor mai semnificative rezultate din această problematică egală de altfel în importanță cu cea a existenței soluțiilor.

Faptul că metodele folosite în această lucrare permit tratarea simultană a cazurilor continuu și discret face ca rezultatele prezentate aici să fie în egală măsură interesante pentru cei ce se ocupă de teoria ecuațiilor diferențiale cît și de integrarea lor numerică sau de algoritmi de optimizare. Pentru ilustratrea teoriei abstracte autorul expune cîteva dintre cele mai importante aplicații ale acestei teorii.

Semnalăm cu satisfacție tratarea originală a multor probleme cît și faptul că numeroase rezultate prezentate sînt originale, fiind datorate autorului care este de altfel un distins cercetător în domeniu. De asemenea se cuvine să semnalăm faptul că alături de recenta lucrare a lui A. Haraux apărută în forma Lecture Notes în Springer-Verlag, această carte este prima monografie din literatură consacrată comportării soluțiilor ecuațiilor neliniare de evoluție. Pentru calitățile sale o recomandăm cu căldură cititorilor.

Viorel Barbu

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

CUVÎNT INTRODUCTIV 9

Capitolul 0

PRELIMINARII DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

§ 1. **Topologii uzuale pe spații Banach** 11
§ 2. **Spațiile** $L^p(\Omega; X)$ 13
§ 3. **Distribuții scalare. Spații Sobolev** 13
§ 4. **Distribuții vectoriale. Spațiile** $W^{k,p}(a, b; X)$ 15
§ 5. **Măsuri** 16

Capitolul I

ELEMENTE DE ANALIZĂ NELINIARĂ

§ 1. **Operatori monotoni. Funcții convexe** 18
1.1. Operatori monotoni 18
1.2. Funcții convexe. Subdiferențiala 26
§ 2. **Existența și regularitatea soluțiilor pentru ecuații de evoluție în spații Hilbert** . . 34

Capitolul II

STABILITATEA SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR DE EVOLUȚIE ÎN SPAȚII HILBERT

§ 1. **Mărginirea soluțiilor pe semiaxă. Convergența în topologia slabă a soluțiilor sau a mediilor lor, pentru** $t \to \infty$ 47
1.1. Soluții mărginite pe semiaxă. Convergența slabă a mediilor 47
1.2. O teoremă de comparație 52
1.3. Condiții necesare și suficiente pentru convergența slabă 53
1.4. Condiții suficiente pentru convergența slabă 54
1.5. Cîteva comentarii 59
1.6. Soluții cu creștere subliniară 60
§ 2. **Convergența în topologia tare a soluțiilor sau a mediilor lor, pentru** $t \to \infty$ . . . 64
2.1. Convergența tare a mediilor în cazul impar 64
2.2. Condiții suficiente pentru convergența tare a soluțiilor 68
2.3. Proprietățile mulțimilor ω-limită 75
2.4. Soluții cu suport compact 86
§ 3. **Scheme cu diferențe finite pentru aproximarea soluțiilor ecuației** $0 \in A(u)$ 87
3.1. Scheme cu diferențe finite de ordinul întîi 88
3.2. Scheme cu diferențe finite de ordinul doi 99
§ 4. **Comportarea la infinit a soluțiilor în cazul forțării periodice. Problema dozării asimptotice** 104

Scanned with OKEN Scanner

4.1. Forțarea periodică 104
4.2. Problema dozării asimptotice 109
Comentarii bibliografice 116

Capitolul III

APLICAȚII

§ 1. O ecuație cu întîrziere infinită 118
§ 2. Ecuația neliniară a undelor 129
§ 3. O clasă de sisteme cu derivate parțiale de tip hiperbolic 138
3.1. Rezultate de existență și regularitate 139
3.2. Comportarea asimptotică a soluțiilor 166
3.3. Cîteva considerații asupra cazurilor cînd variabila spațială parcurge $\mathbf{R}_+$ sau $\mathbf{R}$ 185
3.4. Exemple 189
Comentarii bibliografice 198

Bibliografie 201
Contents 207

Scanned with OKEN Scanner

CUVÎNT INTRODUCTIV

Teoria operatorilor monotoni și a semigrupurilor neliniare de contracții s-a dovedit a fi un instrument eficient în studiul ecuațiilor neliniare de evoluție. Progresele spectaculoase ale acestei teorii realizate în ultimii 10—15 ani se explică atît prin tendința firească a extinderii la cazul neliniar a rezultatelor cunoscute din cazul liniar cît și prin aplicațiile importante ale acestei teorii în special în domeniul ecuațiilor cu derivate parțiale. Astăzi se poate vorbi de o teorie închegată a existenței soluțiilor pentru ecuațiile de evoluție asociate operatorilor monotoni. În literatura matematică există deja cîteva monografii consacrate acestui subiect între care amintim pe cele semnate de V. Barbu (Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Editura Academiei, București, România — Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1976) și H. Brézis (Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. Studies 5, North Holland, Amsterdam, 1973).

În ultimii ani s-a conturat de asemenea o teorie a stabilității și comportării la infinit a soluțiilor ecuațiilor de evoluție asociate operatorilor monotoni. Premisele apariției acestei teorii sînt rezultatele mai vechi din teoria stabilității pentru ecuațiile diferențiale ordinare pe spații finit dimensionale.

Monografia de față își propune ca un prim obiectiv principal expunerea sistematică a principalelelor rezultate cunoscute pînă în prezent din teoria amintită a stabilității și comportării la infinit a soluțiilor ecuațiilor de evoluție de tip monoton. Astfel, Capitolul II al cărții este consacrat în exclusivitate acestui subiect. Pentru a se realiza o autonomie a lucrării sînt expuse mai întîi (în Cap. 0) cîteva elemente de analiză funcțională, după care (în Cap. I) sînt prezentate proprietățile de bază ale operatorilor monotoni și funcțiilor convexe precum și rezultatele fundamentale referitoare la existența soluțiilor pentru ecuații neliniare de evoluție de tip monoton pe spații Hilbert.

Un al doilea obiectiv principal al lucrării este ilustrarea rezultatelor abstracte și a metodelor de investigație din capitolele I și II prin analizarea în detaliu a cîtorva aplicații, insistîndu-se atît asupra existenței soluțiilor cît și asupra regularității și comportării asimptotice a acestora (vezi Cap. III).

În ceea ce privește organizarea materialului, menționăm că fiecare capitol este împărțit în paragrafe și acestea, la rîndul lor, în secțiuni. Referirile la o anumită teoremă, relație etc. în cadrul aceluiași capitol

Scanned with OKEN Scanner

se vor face, în general, doar prin indicarea numărului de ordine al acestora; în situația contrară, adică atunci cînd dorim să indicăm o teoremă, relație etc. din alt capitol decît cel pe care-l parcurgem la momentul respectiv, la numărul de ordine al acestora se va adăuga numărul capitolului și paragrafului respectiv sau numai al capitolului.

Majoritatea rezultatelor prezentate în această monografie au fost expuse de autor între anii 1979—1982 în cadrul seminariilor conduse de prof. V. Barbu și prof. A. Haimovici de la Universitatea „Al. I. Cuza" din Iași.

În încheiere autorul dorește să exprime recunoștința și mulțumirile sale profesorului V. Barbu care l-a îndemnat să scrie această carte și care l-a sprijinit în mod generos prin numeroasele sugestii și discuțiile deosebit de fructuoase din perioada redactării prezentei monografii.

Gheorghe Moroșanu

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 0

PRELIMINARII DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

Acest capitol are caracter introductiv. Scopul său este de a aminti principalele noțiuni, notații și rezultate de analiză funcțională care vor fi utilizate frecvent în capitolele următoare.

§ 1. TOPOLOGII UZUALE PE SPAȚII BANACH

Fie X un spațiu Banach real cu norma $\|\cdot\|$. Spațiul X' al funcționalelor liniare și continue pe X se numește spațiul dual al lui X. X' este de asemenea un spațiu Banach în raport cu norma

$$\|x^*\|_{X'} = \sup \{|x^*(x)| ; \|x\| \leqslant 1\}.$$

Dacă $x \in X$, $x^* \in X'$, atunci valoarea $x^*(x)$ se va mai nota $(x, x^*)_{XX'}$.

Pe lîngă *topologia tare* definită de normă, pe spațiul X se poate considera de asemenea *topologia slabă* generată de X', pentru care o bază de vecinătăți ale originii este dată de mulțimile de forma $\{x \in X ; |x_1^*(x)| < \varepsilon, \ldots, |x_n^*(x)| < \varepsilon. \ x_1^*, \ldots, x_n^* \in X', \ \varepsilon > 0\}$. Convergența la $x_0 \in X$ a unui șir $\{x_n\} \subset X$ în topologia slabă va fi notată uneori prin $x_n \rightharpoonup x_0$ însă de cele mai multe ori vom folosi semnele „$\rightarrow$" sau „lim" precizîndu-se că este vorba de convergență slabă, acest fapt însemnînd că $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x_0)$, $\forall x^* \in X'$. Dacă în particular X este un spațiu Hilbert real, adică norma sa este definită de un produs scalar notat $(.,.)$ prin $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, atunci $x_n \rightharpoonup x_0$ slab în X înseamnă: $(x_n, y) \rightarrow (x_0, y)$, $\forall y \in X$. Acest fapt se datorează teoremei de reprezentare a lui F. Riesz. Convergența tare (convergența în topologia normei) va fi notată prin „$\rightarrow$" sau „lim", uneori precizîndu-se în plus că este vorba de convergență tare.

Toate noțiunile legate de topologia slabă vor fi numite, corespunzător, slabe. În general, vom evita să adăugăm adjectivul „tare" la noțiunile legate de topologia tare.

De exemplu, vom vorbi despre *închiderea slabă* și despre *închiderea* unei mulțimi. Închiderea (tare) a unei mulțimi M din X se va nota cu $\bar{M}$ sau, cînd va fi pericol de confuzie, cu $\bar{M}^X$. *Interiorul* (tare) al unei mulțimi M se va nota cu Int M.

Evident orice mulțime slab închisă este tare închisă. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Totuși este cunoscut că

Teorema 1.1. (Mazur). *Orice submulțime convexă și (tare) închisă a unui spațiu liniar normat este slab închisă.*

Pentru demonstrație recomandăm, de exemplu, V. Barbu și T. Precupanu [1, p. 29].

Spațiul X poate fi scufundat în X'' (dualul lui X') prin intermediul aplicației $x \rightarrow f_x$, unde $f_x \in X''$ este definită prin $f_x(x^*) = x^*(x)$, $\forall x^* \in X'$.

Dacă această aplicație este surjectivă (deci prin intermediul ei X poate fi identificat cu X''), atunci X se zice *reflexiv*. De exemplu, dacă X este spațiu Hilbert, atunci X este reflexiv.

În expunere vom apela foarte des la următorul rezultat

Teorema 1.2. (Eberlein-Šmulyan). *X este reflexiv dacă și numai dacă orice șir mărginit din X conține cel puțin un subșir convergent în topologia slabă a lui X.*

Pentru demonstrație vezi, de exemplu, K. Yosida [1, p. 141].

Dacă X nu este reflexiv, atunci pe X' se poate defini, în afară de topologia tare și de cea slabă, generată de X'', o altă topologie numită *slab stelată*, generată de X, pentru care un sistem fundamental de vecinătăți ale originii este format din mulțimile de forma $\{x^* \in X';\ |x^*(x_j)| < \varepsilon;\ x_j \in X,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \varepsilon > 0\}$.

Deci, $x_n^* \to x_0^*$ slab stelat în X' înseamnă : $x_n^*(x) \to x_0^*(x)$, $\forall\, x \in X$. Amintim aici următorul rezultat important :

Teorema 1.3. (Alaoglu). *Bila unitate închisă din X' (adică mulțimea $\{x^* \in X';\ \|x^*\|_{X'} \leqslant 1\}$ este slab stelat compactă.*

Pentru demonstrația acestei teoreme, care de altfel este adevărată pentru X liniar normat oarecare, recomandăm, de exemplu, R. Cristescu [1, p. 116].

Evident dacă X este reflexiv, atunci topologia slab stelată a spațiului X' coincide cu topologia sa slabă.

Foarte folositor în expunerea noastră va fi de asemenea următorul criteriu de convergență tare :

Propoziția 1.1. *Dacă X este spațiu Banach uniform convex și $\{x_n\} \subset X$ satisface condițiile : $x_n \to x_0$ slab și $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x_0\|$, atunci $x_n \to x_0$ tare în X.*

Demonstrație. Concluzia rezultă în mod banal dacă $x_0 = 0$. Presupunem acum $x_0 \neq 0$. Din ipoteze rezultă că de fapt $\|x_n\| \to \|x_0\|$. Notăm $y_n = (1/\|x_0\|)x_n$, $y_0 = (1/\|x_0\|)x_0$. Presupunem, prin contradicție, că y_n nu converge tare la y_0, adică există $\varepsilon > 0$ astfel încît $\forall\, k \in \mathbf{N}$ (mulțimea numerelor naturale), $\|y_{n_k} - y_0\| \geqslant \varepsilon$, unde $\{y_{n_k}\}$ este un subșir al șirului $\{y_n\}$. Cum X este uniform convex rezultă că există $\delta > 0$ astfel încît $\forall\, k \in \mathbf{N}, \|y_{n_k} + y_0\| \leqslant 2(1 - \delta)$. Deoarece $y_n \to y_0$ slab, acest fapt conduce la $\|y_0\| \leqslant 1 - \delta$ care este o contradicție. ∎

Un criteriu de convergență slabă utilizat în expunere este

Propoziția 1.2. (Lema lui Z. Opial). *Presupunem că X este spațiu Hilbert real, F este o submulțime nevidă a lui X și $\{x_n\}$ este un șir în X. Dacă*

(a) *există* $\lim \|x_n - p\| = \rho(p)$, $\forall\, p \in F$,

(b) *mulțimea limitelor slabe ale subșirurilor lui $\{x_n\}$ slab convergente este inclusă în F,*

atunci există $x_0 \in F$ astfel încît $x_n \to x_0$ slab în X.

Demonstrație. Fie $p, q \in F$ limitele slabe pentru două subșiruri slab convergente oarecare ale lui $\{x_n\}$. Atunci utilizînd egalitatea $\|x_n - p\|^2 = \|x_n - q\|^2 + 2(x_n - q,\ q - p) + \|q - p\|^2$ se obține $\rho^2(p) = \rho^2(q) + \|q - p\|^2$ și analog relația simetrică $\rho^2(q) = \rho^2(p) + \|p - q\|^2$. Prin urmare $p = q$, ceea ce demonstrează propoziția. ∎

Deoarece intenția noastră a fost numai de a introduce noțiunile și terminologia de bază și de a aminti unele rezultate strîns legate de expunere nu insistăm mai mult asupra acestor chestiuni. Ele pot fi aprofundate prin consultarea tratatelor clasice de analiză funcțională.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. SPAȚIILE $L^p(\Omega\,;\,X)$

Peste tot de aici încolo în acest capitol X va desemna un spațiu Banach real cu norma notată prin $\|\cdot\|$. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulțime măsurabilă Lebesgue, unde $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$, $n \in \mathbf{N}^* = \{1,2,\ldots\}$. Se va nota, ca de obicei, prin $L^p(\Omega\,;\,X)$, $1 \leqslant p < +\infty$, spațiul claselor de echivalență în raport cu egalitatea aproape peste tot (pe scurt a.p.t.), de funcții (tare) măsurabile de la Ω la X, ale căror norme la puterea p sînt integrabile în sens Lebesgue pe Ω. Amintim că pentru orice $1 \leqslant p < +\infty$, $L^p(\Omega\,;\,X)$ este un spațiu Banach real dotat cu norma uzuală

$$\|u\|_{L^p(\Omega;\,X)} = \left(\int_\Omega \|u(x)\|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Se va nota prin $L^\infty(\Omega\,;\,X)$ spațiul claselor de echivalență în raport cu egalitatea a.p.t. de funcții măsurabile de la Ω la X ale căror norme sînt esențial mărginite pe Ω. $L^\infty(\Omega\,;\,X)$ este de asemenea un spațiu Banach cu norma $\|u\|_{L^\infty(\Omega;\,X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|u(x)\|$.

Proprietățile spațiilor $L^p(\Omega\,;\,X)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, sînt foarte cunoscute, astfel încît nu vom insista asupra lor. În general, elementele spațiilor $L^p(\Omega\,;\,X)$ vor fi numite, ca de obicei, funcții. În cazul cînd va exista pericol de confuzie se face totuși distincție între reprezentanții aceleiași clase de echivalență din $L^p(\Omega\,;\,X)$.

În cazul cînd $X = \mathbf{R}$ în loc de $L^p(\Omega\,;\,X)$ se va scrie simplu $L^p(\Omega)$. Dacă Ω este un interval al axei reale, să zicem $\Omega =]a,b[$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, atunci în loc de $L^p((a,b)\,;\,X)$ vom scrie $L^p(a,b\,;\,X)$.

În sfîrșit, se va nota cu $L^p_{loc}(\mathbf{R}_+\,;\,X)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\mathbf{R}_+ = [0,+\infty[$, spațiul local convex (al claselor de echivalență în raport cu egalitatea a.p.t.) de funcții măsurabile $u : \mathbf{R}_+ \to X$ care au proprietatea că pentru orice $T > 0$, u (restrînsă la $]0,T[$) $\in L^p(0,T\,;\,X)$; în mod analog, $L^p_{loc}(\mathbf{R}\,;\,X)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, va desemna spațiul local convex (al claselor de echivalență în raport cu egalitatea a.p.t.) de funcții măsurabile $u : \mathbf{R} \to X$ îndeplinind proprietatea că, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, u (restrînse la $]a,b[$) $\in L^p(a,b\,;\,X)$.

§ 3. DISTRIBUȚII SCALARE. SPAȚII SOBOLEV

Considerăm acum o mulțime Ω deschisă în spațiul euclidian $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Notăm cu $C_0^\infty(\Omega)$ spațiul tuturor funcțiilor $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ infinit derivabile și cu suport compact conținut în Ω. Prin $\operatorname{supp}\xi$ (suportul funcției ξ) se înțelege închiderea mulțimii $\{x\,;\,x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega,\ \xi(x) \neq 0\}$. Elementele spațiului $C_0^\infty(\Omega)$ se numesc de regulă *funcții test*.

Fie K un compact în Ω. Se notează cu $\mathscr{D}_K(\Omega)$ mulțimea funcțiilor $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ care au suportul conținut în K. Dotat cu familia de seminorme

$$p_{K,j}(\xi) = \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leqslant j}} |D^\alpha \xi(x)|,\ j \in \mathbf{N} = \{0,1,\ldots\},$$

$\mathscr{D}_K(\Omega)$ este un spațiu Fréchet (local convex, metrizabil și complet). Am notat

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \text{ și } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,\ \forall \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{N}^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident pentru orice două compacte K_1, $K_2 \subset \Omega$ cu $K_1 \subset K_2$ topologia lui $\mathscr{D}_{K_1}(\Omega)$ coincide cu topologia relativă a lui $\mathscr{D}_{K_1}(\Omega)$ ca subspațiu al lui $\mathscr{D}_{K_2}(\Omega)$. De asemenea $C_0^\infty(\Omega)$ coincide algebric cu reuniunea după toate compactele $K \subset \Omega$ a mulțimilor $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Atunci $C_0^\infty(\Omega)$ poate fi privit ca *limita inductivă strictă* a familiei: $\{\mathscr{D}_K(\Omega)$; K compact conținut în $\Omega\}$. Astfel topologizat $C_0^\infty(\Omega)$ se mai notează cu $\mathscr{D}(\Omega)$.

Definiție. Orice funcțională liniară și continuă pe $\mathscr{D}(\Omega)$ se numește *distribuție pe* Ω.

Spațiul distribuțiilor pe Ω se notează cu $\mathscr{D}'(\Omega)$. Dacă $u : \Omega \to \mathbf{R}$ este o funcție măsurabilă și integrabilă Lebesgue pe orice compact din Ω, atunci evident aplicația $\mathscr{D}(\Omega) \ni \xi \to \int_\Omega u(x)\, \xi(x)\, dx$ este o distribuție pe Ω care se notează tot cu u. Se spune că u este o distribuție de tip funcție.

Definiție. *Derivata de ordin* α, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, *a unei distribuții* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ este distribuția $D^\alpha u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definită prin

$$D^\alpha u(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\, u(D^\alpha \xi),\ \forall \xi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Fie acum $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ și $k \in \mathbf{N}^*$.

Definiție. Se numește *spațiu Sobolev* de ordin k mulțimea

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u\,;\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ cu } |\alpha| \leqslant k\},$$

derivatele fiind luate în sensul distribuțiilor pe Ω. Amintim că

Teorema 3.1. $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $k \in \mathbf{N}^*$, *sînt spații Banach relativ la normele*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p},\ \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

De asemenea $W^{k,\infty}(\Omega)$, $k \in \mathbf{N}^*$ *sînt spații Banach cu normele*

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},\quad \forall u \in W^{k,\infty}(\Omega).$$

Pentru demonstrație vezi de exemplu R. A. Adams [1, p. 45].

Completarea lui $\mathscr{D}(\Omega)$ în topologia lui $W^{k,p}(\Omega)$ se notează cu $W_0^{k,p}(\Omega)$. Pentru cazul $p = 2$ se folosesc notațiile $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$.

Teorema 3.2. *Spațiile* $H^k(\Omega)$ *și* $H_0^k(\Omega)$ *sînt spații Hilbert reale relativ la produsul scalar*

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx,\ \forall u, v \in H^k(\Omega)\ (\textit{respectiv } H_0^k(\Omega)).$$

Dualul spațiului $H_0^k(\Omega)$ se notează cu $H^{-k}(\Omega)$, deci prin definiție $H^{-k}(\Omega) = (H_0^k(\Omega))'$, $k \in \mathbf{N}^*$.

Deoarece $\mathscr{D}(\Omega)$ este dens în $H_0^k(\Omega)$ și injecția $i : \mathscr{D}(\Omega) \to H_0^k(\Omega)$ (care pune în corespondență fiecărei funcții test $\xi \in \mathscr{D}(\Omega)$ distribuția de tip funcție corespunzătoare) este continuă, urmează că $H^{-k}(\Omega)$ este dens și continuu scufundat în $\mathscr{D}'(\Omega)$. Această scufundare se face prin intermediul aplicației adjuncte $i^* : H^{-k}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$.

Dacă Ω este un interval real, să zicem $\Omega =]a,b[$, $a < b$, atunci, în loc de $W^{k,p}(]a,b[)$, $H^k(]a,b[)$, $H_0^k(]a,b[)$ vom scrie $W^{k,p}(a,b)$, $H^k(a,b)$ și respectiv $H_0^k(a,b)$.

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, mai amintim că dacă Ω este o mulțime mărginită și deschisă în $\mathbf{R}^n$ avînd frontiera Γ suficient de regulată, atunci

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\,;\, u|_\Gamma = 0\}$$

(vezi, de exemplu, V. Barbu [1, p. 23]. Prin $u|_\Gamma$ s-a notat „urma" funcției u pe Γ care este bine definită în virtutea cunoscutei teoreme de „urmă" (Cf., de exemplu, S. Aizicovici [2, p. 36]).

Notă bibliografică. Cititorul interesat în aprofundarea cunoștințelor privind teoria distribuțiilor scalare și spațiile Sobolev poate consulta următoarele cărți : R. A. Adams [1], R. Cristescu [1], J. L. Lions și E. Magenes [1], L. Schwartz [1], K. Yosida [1], ș.a.

§ 4. DISTRIBUȚII VECTORIALE. SPAȚIILE $W^{k,p}(a, b; X)$

Considerăm că $\Omega =]a, b[\subset \mathbf{R}$, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ și notăm cu $\mathscr{D}'(a,b; X)$ spațiul operatorilor liniari continui de la $\mathscr{D}(a, b) = \mathscr{D}(]a, b[)$ în X. Un element $u \in \mathscr{D}'(a,b; X)$ se numește *distribuție vectorială* pe $]a,b[$ cu valori în X.

Dacă $u :]a,b[\to X$ este o funcție integrabilă în sens Bochner pe orice interval mărginit $I \subset]a, b[$ (echivalent funcția $t \to \|u(t)\|_X$ este în $L^1(I)$, pentru orice interval mărginit $I \subset]a,b[$) atunci, la fel ca în cazul scalar, u definește în mod unic o distribuție din $\mathscr{D}'(a,b; X)$, notată tot cu u, prin :

$$u(\xi) = \int_a^b \xi(t)u(t)\mathrm{d}t, \quad \forall \xi \in \mathscr{D}(a, b).$$

Dacă $u \in \mathscr{D}'(a, b; X)$ vom nota cu $u^{(j)}$ *derivata distribuțională de ordin* j, $j \in \mathbf{N}$, adică

$$u^{(j)}(\xi) = (-1)^j u\left(\frac{\mathrm{d}^j \xi}{\mathrm{d}t^j}\right), \quad \forall \xi \in \mathscr{D}(a, b).$$

În notația convențională $u^{(0)} = u$. Prin $\dfrac{\mathrm{d}^j \xi}{\mathrm{d}t^j}$ se notează derivata obișnuită de ordinul j a funcției $\xi = \xi(t)$.

Fie $k \in \mathbf{N}^*$ și $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Prin definiție

$$W^{k,p}(a, b; X) = \{u \in \mathscr{D}'(a, b; X)\,;\, u^{(j)} \in L^p(a, b; X),\ j = 0,1,\ldots,k\}.$$

Teorema 4.1. *Pentru orice* $k \in \mathbf{N}^*$ *și* $1 \leqslant p < +\infty$ *spațiul* $W^{k,p}(a, b; X)$ *este spațiu Banach relativ la norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \left\{\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|^p_{L^p(a,b;X)}\right\}^{1/p}, \quad \forall u \in W^{k,p}(a, b; X).$$

De asemenea, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ *spațiul* $W^{k,\infty}(a, b; X)$ *este spațiu Banach relativ la norma*

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(a,b;X)} = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \|u^{(j)}\|_{L^\infty(a,b;X)}, \quad \forall u \in W^{k,\infty}(a,b; X).$$

Scanned with OKEN Scanner

La fel ca în cazul scalar, se notează pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, $W^{k,2}(a, b; X) = H^k(a, b; X)$.

Teorema 4.2. *Dacă X este spațiu Hilbert real cu produsul scalar notat $(.,.)_X$, atunci, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, $H^k(a, b; X)$ este de asemenea spațiu Hilbert real relativ la produsul scalar*

$$(u, v)_{H^k(a,b;X)} = \sum_{j=0}^{k} \int_a^b (u^{(j)}(t), v^{(j)}(t))_X \, dt, \quad \forall u, v \in H^k(a, b; X).$$

Pentru $1 \leqslant p \leqslant \infty$ și $k \in \mathbf{N}^*$ vom nota cu $W^{k,p}_{loc}(a, b; X)$ spațiul distribuțiilor $u \in \mathscr{D}'(a, b; X)$ cu proprietatea că $u \in W^{k,p}(t_1, t_2; X)$ pentru orice interval mărginit $]t_1, t_2[\subset]a, b[$.

În continuare vom considera că $]a, b[$ este un interval mărginit, să zicem $]0, T[$, $0 < T < +\infty$.

Fie $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ și $k \in \mathbf{N}^*$. Prin definiție $A^{k,p}(0, T; X)$ reprezintă spațiul tuturor funcțiilor absolut continue $u : [0, T] \to X$ pentru care există (a.p.t.) derivatele $d^j u/dt^j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, astfel încît $d^j u/dt^j \in L^p(0, T; X)$ $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ și $d^j u/dt^j$ sînt absolut continue pînă la ordinul $k - 1$ inclusiv.

Teorema 4.3. (Y. Komura). *Presupunem că X este spațiu Banach reflexiv și $v : [0, T] \to X$ este o funcție absolut continuă. Atunci v este derivabilă* a.p.t. *pe* $]0, T[$, $\dfrac{dv}{dt} \in L^1(0, T; X)$ *și*

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \frac{dv}{ds}(s)ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Pentru demonstrație vezi V. Barbu [1, p. 16].

În baza acestei teoreme deducem că dacă X este reflexiv, atunci $v \in A^{1,1}(0, T; X)$ dacă și numai dacă v este o funcție absolut continuă pe $[0, T]$.

Teorema 4.4. *Fie $v \in L^p(0, T; X)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Atunci următoarele condiții sînt echivalente :*

(i) $v \in W^{k,p}(0, T; X)$

(ii) $\exists\, v_1 \in A^{k,p}(0, T; X)$ *astfel încît* $v_1(t) = v(t)$, a.p.t. $t \in]0, T[$.

Pentru demonstrație recomandăm tot V. Barbu [1, p. 19].

Deci $W^{k,p}(0, T; X)$ poate fi identificat cu $A^{k,p}(0, T; X)$. Astfel $W^{1,1}(0, T; X)$ se identifică, în cazul cînd X este spațiu Banach reflexiv, cu mulțimea funcțiilor $v : [0, T] \to X$ absolut continue. De asemenea, dacă X este spațiu Banach reflexiv, atunci $W^{1,\infty}(0, T; X)$ se poate identifica cu spațiul funcțiilor lipschitziene de la $[0, T]$ la X.

Să mai remarcăm că $W^{k,p}(0, T; \mathbf{R}^n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, se poate identifica cu spațiul produs $(W^{k,p}(0, T))^n$. Prin $H_0^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ vom înțelege atunci spațiul produs $(H_0^1(0, T))^n$, unde $H_0^1(0, T)$ poate fi privit ca spațiul funcțiilor absolut continue $v \in A^{1,2}(0, T; \mathbf{R})$ cu $v(0) = v(T) = 0$.

Notă bibliografică. Material de bază în legătură cu § 4 se găsește în S. Aizicovici [2], V. Barbu [1], V. Barbu și T. Precupanu [1], L. Schwartz [2] ș.a.

§ 5. MĂSURI

Se notează ca de obicei cu $C([0, T]; X)$, $T > 0$ spațiul funcțiilor continue de la $[0, T]$ la X înzestrat cu topologia convergenței uniforme.

Scanned with OKEN Scanner

$BV(0, T; X)$ notează spațiul funcțiilor cu variație mărginită de la $[0, T]$ la X. Dacă $X = \mathbf{R}$, atunci aceste spații se notează simplu cu $C[0, T]$ și respectiv $BV(0, T)$.

Apoi, se notează cu $M(0,T)$ dualul spațiului $C[0, T]$, adică spațiul funcționalelor liniare și continue pe $C[0, T]$. Un element din $M(0, T)$ se numește *măsură* Radon sau simplu măsură pe $[0, T]$.

Deoarece incluziunea $\mathcal{D}(0,T) \subset C[0, T]$ este densă și continuă (adică injecția (identitatea) $i : \mathcal{D}(0,T) \to C[0,T]$ este continuă) urmează că $M(0,T)$ este dens și continuu scufundat în $\mathcal{D}'(0, T)$. Scufundarea $M(0,T) \subset \mathcal{D}'(0,T)$ se face prin intermediul aplicației adjuncte $i^* : M(0,T) \to \mathcal{D}'(0,T)$. Cu alte cuvinte restricția oricărei măsuri din $M(0, T)$ la $\mathcal{D}(0, T)$ este o distribuție din $\mathcal{D}'(0, T)$.

Este cunoscut următorul rezultat :

Teorema 5.1. (F. Riesz). *Dată o funcție $v \in BV(0, T)$ aceasta definește o măsură notată dv prin* $dv(\xi) = \int_0^T \xi(t)\, dv(t)$, $\forall \xi \in C[0, T]$, *(integrala fiind considerată în sens Stieltjes) și, invers, orice măsură din $M(0,T)$ poate fi reprezentată printr-o integrală Stieltjes asociată unei funcții din $BV(0, T)$.*

În mod analog, se notează cu $M(0, T; \mathbf{R}^n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, dualul spațiului $C([0,T]; \mathbf{R}^n)$. Teorema 5.1 poate fi extinsă astfel :

Dată $v = (v_1, \ldots, v_n) \in BV(0,T; \mathbf{R}^n)$ aceasta definește măsura (vectorială) $dv \in M(0, T; \mathbf{R}^n)$ prin

$$dv(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T \xi_i(t)\, dv_i(t), \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in C([0, T]; \mathbf{R}^n).$$

Invers, dată măsura $\mu \in M(0, T; \mathbf{R}^n)$ există o funcție $v \in BV(0, T; \mathbf{R}^n)$ astfel încît $\mu = dv$ (vezi formula de mai sus).

Se știe că dacă $v \in BV(0, T; \mathbf{R}^n)$, atunci v este continuă pe $[0, T]$, cu excepția unei mulțimi numărabile de puncte din $[0, T]$. În plus, există derivata sa în sens a.p.t. dv/dt și (clasa lui) dv/dt este în $L^1(0, T; \mathbf{R}^n)$.

Se notează cu v_a și v_s partea absolut continuă și respectiv partea singulară a funcției $v \in BV(0, T; \mathbf{R}^n)$, adică

$$v_a(t) = \int_0^t \frac{dv}{ds}(s)ds, \qquad t \in [0, T];$$

$$v_s(t) = v(t) - v_a(t), \; t \in [0, T].$$

Orice măsură $\mu = dv \in M(0, T; \mathbf{R}^n)$ cu $v \in BV(0, T; \mathbf{R}^n)$ se descompune după formula $\mu = \mu_a + \mu_s$, unde $\mu_a = dv/ds$ și $\mu_s = dv_s$ (*partea absolut continuă* și respectiv *partea singulară* a măsurii μ).

În sfîrșit, să menționăm următoarea formulă de integrare prin părți :

$$(F) \qquad dv(h) = (v(T), h(T))_{\mathbf{R}^n} - (v(0), h(0))_{\mathbf{R}^n} - \int_0^T (v(t), h'(t))_{\mathbf{R}^n}\, dt,$$

pentru orice $v \in BV(0, T; \mathbf{R}^n)$, $h \in W^{1,1}(0, T; \mathbf{R}^n)$, unde $(.,.)_{\mathbf{R}^n}$ reprezintă produsul scalar în $\mathbf{R}^n$.

Notă bibliografică. În legătură cu acest paragraf se pot consulta următoarele cărți : V. Barbu și T. Precupanu [1], N. Bourbaki [1], R. Edwards [1], M. Nicolescu [1], F. Riesz și B. Sz.-Nagy [1].

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

ELEMENTE DE ANALIZĂ NELINIARĂ

În acest capitol sînt expuse proprietăţile de bază ale operatorilor monotoni şi funcţiilor convexe precum şi rezultatele fundamentale din teoria existenţei pentru ecuaţii neliniare de evoluţie asociate operatorilor monotoni pe spaţii Hilbert.

Pentru concizia lucrării sînt omise demonstraţiile unor teoreme în cazul în care aceste demonstraţii sînt fie mai tehnice, fie foarte cunoscute.

Pe cît posibil autorii rezultatelor sau demonstraţiilor expuse au fost indicaţi în text. De multe ori însă forma sub care au fost enunţate unele teoreme, mai convenabilă pentru noi, sau demonstraţiile mai mult sau mai puţin modificate faţă de cele originale nu au permis acest lucru.

Pentru completarea informaţiei referitoare la problematica acestui capitol recomandăm cititorului lucările : V. Barbu [1, 6], V. Barbu şi T. Precupanu [1], H. Brézis [1], A. Haraux [2], D. Pascali şi S. Sburlan [1], N. Pavel [1,2], A. Pazy [3].

§ 1. OPERATORI MONOTONI. FUNCŢII CONVEXE

1.1. Operatori monotoni

Fie X, Y spaţii liniare reale şi $X \times Y$ produsul lor cartezian. Un element din $X \times Y$ se scrie $[x, y]$, cu $x \in X$ şi $y \in Y$.

Dacă $A : D(A) \subset X \to Y$ este un operator (posibil multivoc), atunci lui i se poate asocia graficul său $G(A) = \{[x, y] \in X \times Y ;\ x \in D(A)$ şi $y \in A(x)\}$, care este o submulţime în $X \times Y$. Reciproc, pentru orice submulţime în $X \times Y$ există un operator unic (posibil multivoc) de la X la Y cu proprietatea că graficul său coincide cu submulţimea dată. În cele ce urmează vom identifica orice operator (posibil multivoc) $A : D(A) \subset X \to Y$ cu graficul său $G(A)$. Astfel vom scrie A în loc de $G(A)$ şi $[x, y] \in A$ în loc de : $x \in D(A)$ şi $y \in A(x)$.

Operatorul invers, privit ca submulţime în $Y \times X$, se defineşte prin

$$A^{-1} = \{[y, x];\ [x, y] \in A\}.$$

Dacă se notează $R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} A(x)$ atunci evident $D(A^{-1}) = R(A)$ şi $R(A^{-1}) = D(A)$. Pentru A, $B \subset X \times Y$ şi $\lambda \in \mathbf{R}$ se notează

$$A + B = \{[x, y + z];\ [x,y] \in A \text{ şi } [x,z] \in B\},\ \lambda A = \{[x,\lambda y];\ [x,y] \in A\}.$$

Evident $A + B$ şi λA (înţelese ca operatori) au domeniile $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ şi $D(\lambda A) = D(A)$. În continuare vom presupune că $X = Y = H$, unde H va desemna un spaţiu Hilbert real cu produsul scalar $(.,.)$ şi norma hilbertiană $\|\cdot\|$. Deşi multe rezultate dintre cele pe care le vom aminti sînt adevărate în spaţii Banach generale, ne vom limita la cadrul hilbertian deoarece acesta va fi suficient pentru consideraţiile din această lucrare.

Scanned with OKEN Scanner

Să amintim cîteva definiții.

Un operator (posibil multivoc) $A : D(A) \subset H \to H$ se numește *monoton* dacă

$$(1.1) \qquad (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2) \geqslant 0,\ \forall [x_1, y_1],\ [x_2, y_2] \in A.$$

Se mai spune că A este submulțime monotonă în $H \times H$.

Evident dacă A este monoton, atunci A^{-1}, care există întotdeauna, este de asemenea monoton.

Dacă A este *univoc* (adică $A(x)$ conține un singur element, $\forall x \in D(A)$) atunci (1.1) se scrie simplu

$$(1.1)' \qquad (A(x_1) - A(x_2),\ x_1 - x_2) \geqslant 0, \quad \forall x_1,\ x_2 \in D(A).$$

Uneori, pentru simplitate, deși A este multivoc se adoptă scrierea (1.1)' în loc de (1.1).

Dacă în (1.1) inegalitatea este strictă pentru $x_1 \neq x_2$, $x_1,\ x_2 \in D(A)$, atunci se spune că A este operator *strict monoton*.

Dacă în loc de (1.1) este îndeplinită relația mai tare $[(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2) \geqslant a \|x_1 - x_2\|^2,\ \forall [x_1, y_1]\ [x_2, y_2] \in A$ cu $a > 0$ fixat, atunci A se numește *tare monoton* (*tare pozitiv* în cazul liniar).

Operatorul multivoc $A : D(A) \subset H \to H$ se numește ω-*monoton* dacă există $\omega > 0$ astfel încît $A + \omega I$ este monoton (I este identitatea pe H).

Operatorul A se zice *injectiv* dacă din $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$ urmează $x = y$. Pentru cazul $H = \mathbf{R}^n (\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$, n natural pozitiv) vom folosi termenii de *aplicație*, *aplicație multivocă* în loc de operator, respectiv operator multivoc.

Vom da cîteva exemple de operatori monotoni

Exemplul 1. Orice aplicație crescătoare $\beta : D(\beta) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (posibil multivocă) este o aplicație monotonă pe spațiul $H = \mathbf{R}$, al cărui produs scalar este definit de înmulțirea obișnuită.

Exemplul 2. Fie T un operator Lipschitz de constantă $\omega > 0$ acționînd de la $D \subset H$ la H. Atunci T este ω-monoton. Dacă $\omega = 1$ (deci T este neexpansiv), atunci operatorul $I + T$ este monoton.

Exemplul 3. Fie K o submulțime nevidă convexă și închisă a lui H. Este cunoscut că pentru orice $x \in H$ există un element unic în K notat $\mathrm{Proi}_K x$ care este „cel mai aproape" de x, adică $\| x - \mathrm{Proi}_K x \| = \inf_{y \in K} \| x - y \|$.

Operatorul de proiecție Proi_K de la H la K este deci univoc. În plus el este monoton deoarece se poate arăta că

$$(\mathrm{Proi}_K x - \mathrm{Proi}_K y,\ x - y) \geqslant \| \mathrm{Proi}_K x - \mathrm{Proi}_K y \|^2, \quad \forall x,\ y \in H.$$

Amintim că un operator $A : D(A) \subset H \to H$ se numește *local mărginit* în $x_0 \in H$ dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $A(V)$ este o submulțime mărginită în H, unde $A(V) = \cup A(x)$, reuniunea fiind luată după toți $x \in D(A) \cap V$.

Teorema 1.1. *Dacă $A : D(A) \subset H \to H$ este monoton, atunci A este local mărginit în fiecare $x \in \mathrm{Int}\, D(A)$ (interiorul mulțimii $D(A)$).*

Demonstrație. Fie $x \in \mathrm{Int}\, D(A)$. Deci există $\varepsilon > 0$ astfel încît $B(x, \varepsilon) = \{y \in H;\ \| y - x \| \leqslant \varepsilon\} \subset D(A)$. Presupunem prin contradicție că A nu este local mărginit în x. Deci există șirurile $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ astfel încît $[x_n, y_n] \in A$, $x_n \to x$ și $\| y_n \| \to \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm $p_n = \dfrac{1}{1 + |(x_n - x,\ y_n)|}\, y_n$. Evident $\|p_n\| \to \infty$ și atunci rezultă din principiul mărginirii uniforme că există un $z \in H$ și un subșir $\{p_{n_k}\}$ al șirului $\{p_n\}$ astfel încît $(p_{n_k},\ z) \geqslant k + 1$, pentru $k \in \mathbf{N}$. Se poate presupune că $\|z\| \leqslant \varepsilon$. Atunci avem $(p_{n_k},\ z + x - x_{n_k}) \geqslant (p_{n_k}, z) - 1 \geqslant k$.

Deci $(y_{n_k},\ z + x - x_{n_k}) = (1 + |(x_{n_k} - x,\ y_{n_k})|)(p_{n_k}, z + x - x_{n_k}) \geqslant$ $\geqslant k$. Rezultă că

$$\lim_{k \to \infty} (y_{n_k},\ z + x - x_{n_k}) = +\infty. \tag{1.2}$$

Să observăm că $x + z \in D(A)$. Deoarece A este monoton, pentru un $u \in A(x + z)$, avem

$$(u - y_{n_k},\ z + x - x_{n_k}) \geqslant 0,\ \forall\ k \in \mathbf{N}. \tag{1.3}$$

Din (1.2) și (1.3) se deduce că

$$(u,\ z + x - x_{n_k}) \to \infty, \text{ pentru } k \to \infty. \tag{1.4}$$

Însă (1.4) este în contradicție cu faptul că $x_n \to x$. În concluzie A este local mărginit în x, deci în orice punct din Int $D(A)$. ■

Notă bibliografică. Teorema 1.1 aparține lui R. T. Rockafellar [4] însă demonstrația urmează ideea lui A. Pazy [3].

Observația 1.1 Dacă $A : D(A) \subset H \to H$ este un operator monoton, atunci pentru orice compact $K \subset$ Int $D(A)$ mulțimea $A(K)$ este mărginită. Acest fapt este o consecință imediată a Teoremei 1.1.

Definiție. Un operator monoton $A : D(A) \subset H \to H$ se numește *maximal monoton* dacă A, ca submulțime în $H \times H$, nu este propriu inclusă în nici o altă submulțime monotonă din $H \times H$.

Este clar că A este operator maximal monoton dacă și numai dacă A^{-1} are această proprietate. Noțiunea de operator maximal monoton are un rol central în această lucrare. Să enunțăm acum următoarea teoremă celebră datorată lui G. Minty [1].

Teorema 1.2. *Fie* $A : D(A) \subset H \to H$ *monoton. Atunci* A *este maximal monoton dacă și numai dacă pentru orice* $\lambda > 0$ (*echivalent pentru un* $\lambda > 0$) $R(I + \lambda A) = H$.

Demonstrație. Vom dovedi numai suficiența, foarte folositoare în cele ce urmează. Presupunem așadar că $R(I + \lambda A) = H$, pentru un $\lambda > 0$. Avem de arătat că A este maximal monoton. Presupunem prin contradicție că n-ar fi așa, adică ar exista $[x_0, y_0] \notin A$ astfel încît

$$(x - x_0,\ y - y_0) \geqslant 0,\ \forall\ [x, y] \in A. \tag{1.5}$$

Prin ipoteză există $[x_1, y_1] \in A$ astfel încît

$$x_1 + \lambda y_1 = x_0 + \lambda y_0. \tag{1.6}$$

Luînd în (1.5) $x = x_1$ și $y = y_1$ și folosind (1.6) se obține $x_1 = x_0$ și $y_1 = y_0$. Deci ar rezulta $[x_0,\ y_0] \in A$. Contradicția obținută arată că A este maximal monoton. Demonstrația necesității, mult mai dificilă, poate fi găsită, de exemplu, în monografia lui V. Barbu [6]. ■

Observația 1.2. Dacă A este maximal monoton, atunci evident $\forall x \in D(A)$, $A(x) = \{y \in H\,;\, (y - v,\ x - u) \geqslant 0, \forall [u, v] \in A\}$. Prin urmare,

Scanned with OKEN Scanner

$\forall x \in D(A)$ mulțimea $A(x)$ este convexă și închisă în H. În particular, $\forall x \in D(A)$ proiecția vectorului nul pe $A(x)$ există și este unică. De obicei, această proiecție se notează cu $A^0(x)$, deci avem $A^0(x) \in A(x)$ și $\|A^0(x)\| = \inf \{\|y\|;\ y \in A(x)\}$. Operatorul univoc $A^0 : D(A) \to H$ se numește *secțiunea minimală* a lui A.

Propoziția 1.1. *Dacă $A : D(A) \subset H \to H$ este maximal monoton, atunci A este demiînchis, adică din $x_n \to x$, tare în H, $y_n \to y$ slab în H, și $[x_n, y_n] \in A$ urmează $[x, y] \in A$.*

Demonstrație. Fie $[x_n, y_n]$ ca în enunț. Atunci $(x_n - u,\ y_n - v) \geqslant 0$, $\forall [u, v] \in A$. Trecînd la limită în această inegalitate se obține $(x - u,\ y - v) \geqslant 0$, $\forall [u, v] \in A$. Atunci, maximalitatea operatorului A implică $[x, y] \in A$. ∎

În continuare, definim pentru orice $\lambda > 0$ operatorii

$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ (*rezolventa* lui A),

$A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ (*aproximanta Yosida* a lui A), unde A este maximal monoton. În virtutea Teoremei 1.2, $D(J_\lambda) = D(A_\lambda) = H$, $\forall \lambda > 0$. Mai mult, din monotonia lui A se poate vedea imediat că J_λ deci și A_λ, $\lambda > 0$, sînt univoci. Cîteva proprietăți ale rezolventei și aproximantei Yosida sînt cuprinse în

Teorema 1.3. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton. Atunci pentru orice $\lambda > 0$*

(i) *J_λ este neexpansiv (lipschitzian de constantă 1),*

(ii) $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda x)$, $\forall x \in H$,

(iii) *A_λ este monoton și lipschitzian de constantă $1/\lambda$,*

(iv) $\|A_\lambda(x)\| \leqslant \|A^0(x)\|$, $\forall x \in D(A)$.

În plus

(v) $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda(x) = A^0(x)$, $\forall x \in D(A)$,

(vi) *$\overline{D(A)}$ este o mulțime convexă și* $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda x = \mathrm{Proi}_{\overline{D(A)}} x$, $\forall x \in H$.

Demonstrație. (i) Înmulțind scalar relația $J_\lambda x - J_\lambda y + \lambda(A(J_\lambda x) - A(J_\lambda y)) \ni x - y$, $x, y \in H$ cu $J_\lambda x - J_\lambda y$ și folosind monotonia lui A se obține $\|J_\lambda x - J_\lambda y\|^2 \leqslant (x - y,\ J_\lambda x - J_\lambda y)$, $x, y \in H$. Deci, prin inegalitatea lui Schwarz rezultă (i).

(ii) Din echivalența evidentă $[x, y] \in A_\lambda \Leftrightarrow [x - \lambda y, y] \in A$ urmează proprietatea (ii).

(iii) Deoarece J_λ este neexpansiv urmează că $I - J_\lambda$, deci A_λ este monoton. Fie acum $x, y \in H$. Înmulțind scalar cu $A_\lambda(x) - A_\lambda(y)$ relația $x - y = J_\lambda x - J_\lambda y + \lambda(A_\lambda(x) - A_\lambda(y))$ și folosind (ii) și monotonia lui A obținem

$$\lambda \|A_\lambda(x) - A_\lambda(y)\|^2 \leqslant (x - y,\ A_\lambda(x) - A_\lambda(y)) \tag{1.7}$$

care arată că într-adevăr A_λ este lipschitzian de constantă $1/\lambda$.

(iv) Să observăm că $A_\lambda(x) = \lambda^{-1}(J_\lambda(x + \lambda A^0(x)) - J_\lambda x)$, $\forall x \in D(A)$, $\lambda > 0$. Astfel, din (i) se obține imediat (iv).

(v) Fie $x \in D(A)$ și să considerăm un șir $\lambda_n \to 0$ pentru care $A_{\lambda_n}(x)$ este slab convergent în H la un vector p. Existența unui asemenea șir $\{\lambda_n\}$ este asigurată de (iv). Deoarece A este monoton avem (vezi și (ii),

$$(A_{\lambda_n}(x) - v,\ J_{\lambda_n} x - u) \geqslant 0,\ \forall [u, v] \in A. \tag{1.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (iv) mai rezultă că $J_\lambda x \to x$, pentru $\lambda \to 0$, $\forall x \in D(A)$.

Trecînd la limită în inegalitatea (1.8) se obține $(p - v, x - u) \geqslant 0$, $\forall [u,v] \in A$.

Cum A este maximal rezultă că $p \in A(x)$. Pe de altă parte tot din (iv) avem $\|p\| \leqslant \limsup_{\lambda \to 0} \|A_\lambda(x)\| \leqslant \|A^0(x)\|$. Deci $p = A^0(x)$ și conform Propoziției 1.1 din Cap. 0, $A_\lambda(x) \to A^0(x)$, cînd $\lambda \to 0$ tare în H.

(vi) Fie $C = \overline{\text{co}\ D(A)}$ („co" înseamnă înfășurătoare convexă) și fixăm $x \in H$. Deoarece A este monoton, $(A_\lambda(x) - v, J_\lambda x - u) \geqslant 0$, $\forall [u,v] \in A$, sau $(x - J_\lambda x - \lambda v, J_\lambda x - u) \geqslant 0$, $\forall [u,v] \in A$ sau

$$\|J_\lambda x\|^2 \leqslant (x - \lambda v, J_\lambda x - u) + (J_\lambda x, u), \quad \forall [u,v] \in A. \tag{1.9}$$

Fie $\lambda_n \to 0$ un șir pentru care $J_{\lambda_n} x$ converge slab în H să zicem la q. Trecîndu-se la limită în (1.9) (unde $\lambda = \lambda_n$) se obține $\|q\|^2 \leqslant \limsup_{n \to \infty} \|J_{\lambda_n} x\|^2 \leqslant (x, q - u) + (q, u)$, $\forall u \in D(A)$, sau $(x - q, u - q) \leqslant 0$, $\forall u \in D(A)$, inegalitate care se poate extinde evident la C. Deci

$$(x - q, u - q) \leqslant 0, \quad \forall u \in C. \tag{1.10}$$

Să observăm că $q \in C$, întrucît $J_\lambda x \in C$, $\forall \lambda > 0$ și C este convexă și închisă, deci slab închisă (conform Teoremei lui Mazur). Astfel din (1.10) rezultă că $q = \text{Proi}_C x$. Întrucît pe orice subșir al lui $J_\lambda x$ se obține aceeași limită slabă $q = \text{Proi}_C x$ urmează că

$$J_\lambda x \to q, \text{ cînd } \lambda \to 0, \text{ slab în } H. \tag{1.11}$$

Prin urmare, din (1.9) avem $\limsup_{\lambda \to 0} \|J_\lambda x\|^2 \leqslant (x, q - u) + (q, u)$, $\forall u \in C$. Punînd în particular $u = q$ obținem

$$\limsup_{\lambda \to 0} \|J_\lambda x\| \leqslant \|q\|. \tag{1.12}$$

Dar (1.11) și (1.12) arată că $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = \text{Proi}_C x$.

În fine, deoarece $J_\lambda x \in D(A)$, $\forall x \in H$ și deoarece pentru orice $z \in C$, $J_\lambda z \to z$, cînd $\lambda \to 0$, avem $z \in \overline{D(A)}$, adică $C \subset \overline{D(A)}$. Deci $\overline{D(A)}$ este convexă și $C = \overline{D(A)}$. Astfel, teorema este complet demonstrată. ∎

Definiție. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator multivoc maximal monoton. Operatorul univoc A' de la H la H cu $D(A') = D(A)$ se numește *secțiune principală* a lui A dacă pentru orice $[x,y] \in \overline{D(A)} \times H$ inegalitatea $(A'(z) - y, z - x) \geqslant 0$, $\forall z \in \overline{D(A)}$ implică $[x, y] \in A$.

Propoziția 1.2. (H. Brézis). *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton. Atunci A^0 (secțiunea minimală a lui A) este secțiune principală a lui A.*

Demonstrație. Considerăm mulțimea $M = \{[x, y] \in \overline{D(A)} \times H;$ $(A^0(z) - y, z - x) \geqslant 0, \forall z \in D(A)\}$. Deoarece $A \subset M$ este suficient să arătăm că este o submulțime monotonă în $H \times H$. Pentru aceasta fie $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in M$. Atunci $x = (1/2)(x_1 + x_2) \in \overline{D(A)}$. Adunînd inegalitățile evidente

$$\left(y_1 - A^0(z), \frac{x_1 - x_2}{2} + x - z\right) \geqslant 0, \ z \in D(A);$$

$$\left(y_2 - A^0(z), x - \frac{x_1 - x_2}{2} - z\right) \geqslant 0, \ z \in D(A)$$

se obține

$$(1/2)(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geqslant 2(A^0(z), x - z) - (y_1 + y_2, x - z), \quad z \in D(A). \tag{1.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Facem acum observația că pentru orice $x \in D(A)$, $(A^0(x), y) \geqslant \geqslant \|A^0(x)\|^2$, $\forall y \in A(x)$. Într-adevăr, cum $A(x)$ este o mulțime convexă, $\|A^0(x)\| \leqslant \|A^0(x) + \alpha(y - A^0(x))\|$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Ridicăm la pătrat această inegalitate, simplificăm prin α și apoi trecem la limită pentru $\alpha \to 0$. Se obține atunci $(A^0(x), y) \geqslant \|A^0(x)\|^2$. Astfel, luînd în (1.13) $z = J_\lambda x$ obținem $(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geqslant 2\lambda(A^0(J_\lambda x), A_\lambda(x)) - (y_1 + y_2, x - J_\lambda x) \geqslant (y_1 + y_2, J_\lambda x - x)$, deoarece $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda x)$. Trecînd la limită în ultima inegalitate pentru $\lambda \to 0$ și ținînd seama de Teorema 1.3, (vi) obținem $(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geqslant 0$, adică M este monotonă în $H \times H$. ■

Definiție. Un operator univoc $A : D(A) = H \to H$ se numește *hemicontinuu* dacă $\lim_{t \to 0} A(x + ty) = Ax$, $\forall x, y \in H$, unde limita este înțeleasă în topologia slabă a lui H.

Teorema 1.4. (G. Minty). *Orice operator univoc $A : D(A) = H \to H$ monoton și hemicontinuu este maximal monoton.*

Demonstrație. Presupunem prin contradicție că A nu ste maximal monoton. Atunci există $x_0, y_0 \in H$ astfel încît $y_0 \neq A(x_0)$ și $(A(x) - y_0, x - x_0) \geqslant 0$, $\forall x \in H$.

Pentru $x := tx_0 + (1 - t)u$, $t \in [0, 1[$, $u \in H$ se obține

$$(A(tx_0 + (1 - t)u) - y_0, u - x_0) \geqslant 0, \quad \forall t \in [0, 1[, \ \forall u \in H.$$

De aici, ținînd seama de hemicontinuitatea lui A, se obține $(A(x_0) - y_0, u - x_0) \geqslant 0$, $\forall u \in H$ care implică evident $y_0 = A(x_0)$. Contradicția la care am ajuns demonstrează teorema. ■

Definiție. Un operator $A : D(A) \subset H \to H$ se numește *coerciv* dacă există $x_0 \in H$ astfel încît $\lim_{n \to \infty} (x_n - x_0, y_n)/\|x_n\| = +\infty$, pentru orice șir $\{[x_n, y_n]\} \subset A$ astfel încît $\|x_n\| \to \infty$.

De exemplu, un operator tare monoton este coerciv.

Teorema 1.5. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton și coerciv. Atunci $R(A) = H$.*

Demonstrație. Fie $y \in H$ arbitrar dar fixat. Din Teorema 1.2 rezultă că pentru $\forall \lambda > 0$ există $[x_\lambda, y_\lambda] \in A$ astfel încît

$$y = \lambda x_\lambda + y_\lambda. \tag{1.14}$$

Înmulțim scalar (1.14) cu $x_\lambda - x_0$, unde x_0 este vectorul din definiția coercivității: $(y - \lambda x_\lambda, x_\lambda - x_0) = (y_\lambda, x_\lambda - x_0)$.

De aici și din proprietatea de coercivitate a lui A se deduce că $\|x_\lambda\|$ este mărginit pentru $\lambda \to 0$. Deci există șirul $\lambda_n \to 0$ și un $x \in H$ astfel încît $x_{\lambda_n} \to x$, slab în H. Atunci (1.14) implică $y_{\lambda_n} \to y$, tare în H. Cum A^{-1} este maximal monoton rezultă în baza Propoziției 1.1 că $[x, y] \in A$. Deci $y \in R(A)$. Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Continuăm cu un rezultat de perturbare datorat lui H. Attouch [1].

Teorema 1.6. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ și $B : D(B) \subset H \to H$ operatori maximal monotoni. Presupunem că diferența algebrică $D(A) - D(B)$ este o vecinătate a originii, altfel spus*

$$0 \in \operatorname{Int}(D(A) - D(B)). \tag{1.15}$$

Atunci $A + B$ este maximal monoton.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că dacă A este maximal monoton și $T : D(T) = H \to H$ este monoton și lipschitzian (cu constanta

Scanned with OKEN Scanner

Lipschitz notată ω), atunci $A + T$ este maximal monoton. Într-adevăr, fie $\mu > 0$ astfel încît $\mu\omega < 1$ și $y \in H$ arbitrar dar fixat. Ecuația

$$x + \mu A(x) + \mu T(x) \ni y \tag{1.16}$$

este echivalentă cu

$$x = (I + \mu A)^{-1}(y - \mu T(x)). \tag{1.17}$$

Din teorema de punct fix a lui Banach deducem că (1.17), deci (1.16), admite o soluție unică $x \in D(A)$. Deci, conform Teoremei 1.2 $A + T$ este maximal monoton. Deci, pentru $y \in H$ arbitrar dar fixat și pentru orice $\lambda > 0$, există $x_\lambda \in D(A)$ verificînd ecuația

$$x_\lambda + A(x_\lambda) + B_\lambda(x_\lambda) \ni y. \tag{1.18}$$

unde B_λ este aproximanta Yosida a lui B. Pentru a dovedi teorema vom arăta mai întîi că

$$\sup_{\lambda>0} \| B_\lambda(x_\lambda) \| < +\infty. \tag{1.19}$$

Înmulțind scalar (1.18) cu $x_\lambda - \overline{x}$, $\overline{x} \in D(A) \cap D(B)$ și ținînd cont că A și B_λ sînt monotoni obținem $\| x_\lambda - \overline{x} \| \leqslant \| y - \overline{x} - A^0(\overline{x}) - B_\lambda(\overline{x}) \|$, $\lambda > 0$. Prin urmare, în virtutea Teoremei 1.3, (iv),

$$\| x_\lambda \| \leqslant 2 \| \overline{x} \| + \| y \| + \| A^0(\overline{x}) \| + \| B^0(\overline{x}) \|, \quad \lambda > 0. \tag{1.20}$$

Din ipoteza (1.15) urmează că există $\varepsilon > 0$ astfel încît $\forall z \in H$, cu $\| z \| < \varepsilon$, $z \in D(B) - D(A)$. Să fixăm un asemenea z, deci $z = b - a$ cu $a \in D(A)$, $b \in D(B)$. Deoarece B_λ este monoton avem $(B_\lambda(x_\lambda) - B_\lambda(b), x_\lambda - b) \geqslant 0$ sau $(B_\lambda(x_\lambda), b) \leqslant (B_\lambda(x_\lambda), x_\lambda) - (B_\lambda(b), x_\lambda - b)$. Deci $(B_\lambda(x_\lambda), z) \leqslant (B_\lambda(x_\lambda), x_\lambda - a) + \| B^0(b) \| \cdot \| x_\lambda - b \|$.

Deoarece $B_\lambda(x_\lambda) = y - x_\lambda - v_\lambda$, $v_\lambda \in A(x_\lambda)$ ultima inegalitate se mai scrie

$$(B_\lambda(x_\lambda), z) \leqslant (y - x_\lambda - v_\lambda, x_\lambda - a) + \| B^0(b) \| \cdot \| x_\lambda - b \|.$$

Folosindu-se și monotonia lui A se obține în continuare

$$(B_\lambda(x_\lambda), z) \leqslant \| x_\lambda - a \| (\| y - x_\lambda \| + \| A^0(a) \|) + \| B^0(b) \| \cdot \| x_\lambda - b \|.$$

Însă, conform cu (1.20), $\| x_\lambda \|$ este mărginit, deci $\forall z \in H$, $\| z \| < \varepsilon$, există $C(z) \geqslant 0$ astfel încît $(B_\lambda(x_\lambda), z) \leqslant C(z)$. În baza principiului mărginirii uniforme se obține estimarea (1.19) care este esențială pentru demonstrație. Din (1.18) se deduce relația $x_\lambda - x_\mu + A(x_\lambda) - A(x_\mu) + B_\lambda(x_\lambda) - B_\mu(x_\mu) \ni 0$, $\forall \lambda, \mu > 0$. Înmulțind scalar această relație cu $x_\lambda - x_\mu$ și ținînd seama de faptul că A este monoton găsim că $\| x_\lambda - x_\mu \|^2 \leqslant -(B_\lambda(x_\lambda) - B_\mu(x_\mu), x_\lambda - x_\mu)$. Deoarece B este de asemenea monoton, $\| x_\lambda - x_\mu \|^2 \leqslant -(B_\lambda(x_\lambda) - B_\mu(x_\mu), \lambda B_\lambda(x_\lambda) - \mu B_\mu(x_\mu))$. Astfel, în virtutea estimării (1.19), $\{x_\lambda\}$ este Cauchy în H. Deci există

$$\lim_{\lambda \to 0} x_\lambda = x, \text{ tare în } H. \tag{1.21}$$

În plus, eventual pe un subșir,

$$B_\lambda(x_\lambda) \to p, \text{ pentru } \lambda \to 0, \text{ slab în } H. \tag{1.22}$$

Deoarece $\| (I + \lambda B)^{-1}(x_\lambda) - x \| \leqslant \lambda \| B_\lambda(x_\lambda) \| + \| x_\lambda - x \|$ rezultă, în baza relațiilor (1.19) și (1.21), că

$$(I + \lambda B)^{-1} x_\lambda \to x, \text{ cînd } \lambda \to 0, \text{ tare în } H. \tag{1.23}$$

Cum B este maximal monoton și $B_\lambda(x_\lambda) \in B((I + \lambda B)^{-1} x_\lambda)$, relațiile (1.22) și (1.23) implică $[x, p] \in B$. În fine, avînd în vedere că A este de asemenea

Scanned with OKEN Scanner

maximal monoton, se trece la limită în (1.18), eventual pe un subșir, și se obține că $x \in D(A)$ și $x + A(x) + B(x) \ni y$. Așadar $R(I + A + B) = H$. Deci, conform Teoremei 1.2, $A + B$ este maximal monoton. ∎

Observația 1.3. Condiția (1.15) este mai slabă decît condiția lui R.T. Rockafellar (vezi, de exemplu, H. Brózis [1, p. 36]) $(\text{Int } D(A)) \cap D(B) \neq \emptyset$, deoarece $\text{Int}\,(D(A) - D(B)) \supset \text{Int}\, D(A) - D(B)$. Evident, condiția (1.15) poate fi satisfăcută chiar dacă $\text{Int}\, D(A) = \text{Int}\, D(B) = \emptyset$.

Un alt rezultat important de perturbare este (vezi V. Barbu [1, p. 82]) :

Teorema 1.7. *Fie* $A : D(A) \subset H \to H$ *și* $B : D(B) \subset H \to H$ *operatori maximal monotoni satisfăcînd condițiile* :

(a) $$D(A) \cap D(B) \neq \emptyset,$$

(b) $$(y, B_\lambda(x)) \geqslant 0, \qquad \forall [x,y] \in A \text{ și } \forall \lambda > 0.$$

Atunci $A + B$ *este maximal monoton.*

Demonstrație. Considerăm din nou ecuația (1.18) cu y arbitrar dar fixat în H. Amintim că în virtutea estimării (1.20), $\{x_\lambda ;\ \lambda > 0\}$ este mărginită în H. Atunci, înmulțind (1.18) cu $B_\lambda(x_\lambda)$ și folosind condiția (b) se obține din nou estimarea (1.19) care este esențială pentru demonstrație. Într-adevăr, revizuind demonstrația teoremei precedente concluzia urmează exact ca acolo. ∎

Observația 1.4. Fie V un spațiu Banach real și V' dualul său. Pentru $v \in V$ și $v^* \in V'$ se notează cu $(v,v^*)_{VV'}$ valoarea funcționalei v^* în punctul v.

Un operator multivoc A de la V la V' (echivalent, o submulțime în $V \times V'$) se numește *monoton* (respectiv monotonă) dacă

$$(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)_{VV'} \geqslant 0,\ \forall [x_i,\ y_i] \in A,\ i = 1,2.$$

Operatorul monoton $A : D(A) \subset V \to V'$ se numește *maximal monoton* dacă A, ca submulțime în $V \times V'$, nu este propriu inclusă în nici o altă submulțime monotonă din $V \times V'$.

De remarcat că toată teoria operatorilor monotoni se poate extinde la cazul spațiilor Banach (vezi V. Barbu [1]).

Această extindere este ușoară dacă V este un spațiu Hilbert real, neindentificat cu dualul său. Astfel, fie $\Lambda : V \to V'$ izomorfismul canonic definit de teorema lui Riesz (de reprezentare a funcționalelor din V'). Evident Λ este o *aplicație de dualitate*, întrucît $(v, \Lambda(v))_{VV'} = \| v \|_V^2 = \| \Lambda(v) \|_{V'}^2$, $\forall v \in V$ și, din definiție, $(w, \Lambda(v)_{VV'} = (v, w)_V$, $\forall v, w \in V$, unde $(.,.)_V$ este simbolul produsului scalar în V.

Atunci este ușor de văzut că $A : D(A) \subset V \to V'$ este monoton (maximal monoton) dacă și numai dacă operatorul $\Lambda^{-1} \circ A : D(A) \subset V \to V$ este monoton (maximal monoton), în sensul definiției inițiale a monotoniei în spații Hilbert.

În acest context Teorema 1.2 ia forma următoare :

Teorema 1.2'. *Fie* V *un spațiu Hilbert real cu dualul* V'. *Operatorul monoton* $A : D(A) \subset V \to V'$ *este maximal monoton dacă și numai dacă codomeniul operatorului* $\Lambda + A$ *coincide cu* V'.

Pentru Teoremele 1.4, 1.5 avem următoarele versiuni.

Teorema 1.4'. *Fie* V *un spațiu Hilbert real cu dualul* V' *și* $A : D(A) = V \to V'$ *un operator univoc monoton și hemicontinuu, adică* $\lim_{t \to 0} A(x + ty) = A(x)$, *în topologia slab stelată a lui* V', $\forall x, y \in V$.

Atunci A *este maximal monoton.*

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.5'. *Fie V un spațiu Hilbert real cu dualul V' și $A : D(A) \subset V \to V'$ un operator maximal monoton și coerciv, adică există un $x_0 \in V$ astfel încît* $\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - x_0,\ y_n)_{VV'}}{\|x_n\|_V} = +\infty$, *pentru orice șir* $\{[x_n, y_n]\} \subset A$ *astfel încît* $\|x_n\|_V \to \infty$. *Atunci A este surjectiv, adică* $R(A) = V'$.

La fel de ușor pot fi reformulate pentru contextul de față și teoremele 1.6 și 1.7.

Exemple de operatori maximal monotoni: a) Fie K o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui H.

După cum s-a văzut mai sus, Proi_K este un operator monoton și lipschitzian de constantă 1 pe H deci, conform Teoremei 1.4, Proi_K este un operator maximal monoton.

b) Fie Ω o mulțime măsurabilă Lebesgue în $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$ și $A : D(A) \subset H \to H$ un operator maximal monoton. Definim operatorul $\bar{A} : D(\bar{A}) \subset L^2(\Omega; H) \to L^2(\Omega; H)$ prin

$$D(\bar{A}) = \{u \in L^2(\Omega; H);\ \text{există } v \in L^2(\Omega; H) \text{ astfel încît } v(\xi) \in A(u(\xi)) \text{ a.p.t. } \xi \in \Omega\},$$

$$\bar{A}(u) = \{v \in L^2(\Omega; H);\ v(\xi) \in A(u(\xi)),\ \text{a.p.t. } \xi \in \Omega\},\ \forall u \in D(\bar{A}).$$

Dacă $\mathrm{măs}(\Omega) < +\infty$ sau $0 \in A(0)$, atunci $\bar{A}$ este maximal monoton. Într-adevăr, se verifică simplu că $\bar{A}$ este monoton iar pentru a arăta maximalitatea este suficient să remarcăm că în ambele cazuri considerate, dacă $g(\xi) \in L^2(\Omega; H)$ atunci $u(\xi) = (I + A)^{-1} g(\xi) \in L^2(\Omega; H)$ și $u + \bar{A}(u) \ni g$.

Operatorul $\bar{A}$ se numește *extensia canonică* a lui A la $L^2(\Omega; H)$ sau *realizarea* lui A pe $L^2(\Omega; H)$. De remarcat că extensiile operatorilor $(I + \lambda A)^{-1}$ și A_λ, $\lambda > 0$ sînt $(I + \lambda \bar{A}^{-1})$ și respectiv $(\bar{A})_\lambda$.

O clasă importantă de operatori monotoni sînt subdiferențialele care vor fi studiate în secțiunea următoare.

1.2. Funcții convexe. Subdiferențiala

Fie din nou H un spațiu Hilbert real cu produsul scalar și norma hilbertiană notate cu $(.,.)$ și respectiv $\|\cdot\|$. Fie funcția $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$; φ se numește *convexă* dacă $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$, $\forall x, y \in H$, $\forall \lambda \in]0,1[$; φ se numește *proprie* dacă există cel puțin un $x \in H$ astfel încît $\varphi(x) < +\infty$. Mulțimea $D(\varphi) = \{x \in H;\ \varphi(x) < +\infty\}$ se numește *domeniul efectiv* al funcției φ. Dacă φ este convexă, atunci $D(\varphi)$ este o mulțime convexă.

În sfîrșit, se spune că φ este *semicontinuă inferior* pe H dacă

$$\liminf_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0), \text{ pentru toți } x_0 \in H, \tag{1.24}$$

sau, echivalent, dacă orice mulțime de nivel $\{x \in H;\ \varphi(x) \leqslant \lambda\}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, este închisă. Deoarece orice mulțime convexă este simultan închisă în topologia tare și în topologia slabă a lui H rezultă că o funcție convexă este semicontinuă inferior dacă și numai dacă ea este *slab semicontinuă inferior* (adică (1.24) are loc cu $x \to x_0$ slab în H, $\forall x_0 \in H$).

Scanned with OKEN Scanner

Un exemplu remrcabil de funcţie convexă şi semicontinuă inferior este *funcţia indicatoare* a unei mulţimi convexe şi închise $K \subset H$, adică funcţia I_K definită prin

$$I_K(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in K \\ +\infty, \text{ dacă } x \in H \setminus K. \end{cases}$$

Teorema 1.8. *Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ o funcţie proprie, convexă şi semicontinuă inferior pe H. Atunci φ este mărginită inferior de o funcţie afină, adică există $y_0 \in H$ şi $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît*

$$\varphi(x) \geqslant (x, y_0) + \lambda_0, \quad \forall x \in H. \tag{1.25}$$

Demonstraţie. Se notează cu Epi φ *epigraful* funcţiei φ, adică Epi $\varphi = \{[x, \lambda] \in H \times \mathbf{R};\ \varphi(x) \leqslant \lambda\}$. Evident, Epi φ este o mulţime închisă şi convexă în spaţiul produs $H \times \mathbf{R}$. Fie $x_0 \in D(\varphi)$. Atunci perechea $[x_0, \varphi(x_0) - \varepsilon] \notin$ Epi φ, pentru orice $\varepsilon > 0$. Folosind teorema lui Hahn-Banach (vezi, de exemplu, V. Barbu şi T. Precupanu [1, pp. 15—17]) rezultă că există o funcţională liniară şi continuă (neidentic nulă) pe $H \times \mathbf{R}$, să zicem ψ, astfel încît

$$\psi(x, t) < \psi(x_0, \varphi(x_0) - \varepsilon), \quad \forall [x, t] \in \text{Epi } \varphi, \ \varepsilon > 0 \text{ fixat}$$

Cu alte cuvinte, există $[x^*, \alpha] \in H \times \mathbf{R} \setminus \{[0,0]\}$ astfel încît

$$(x^*, x) + \alpha t < (x^*, x_0) + \alpha(\varphi(x_0) - \varepsilon), \quad \forall [x,t] \in \text{Epi } \varphi.$$

Să remarcăm că α trebuie să fie negativ deoarece $[x_0, \varphi(x_0) + n] \in$ Epi φ, $\forall n \in \mathbf{N}$. Pe de altă parte, $[x, \varphi(x)] \in$ Epi φ, pentru orice $x \in D(\varphi)$. Prin urmare $(x^*, x) + \alpha\varphi(x) \leqslant (x^*, x_0) + \alpha(\varphi(x_0)$, $\forall x \in D(\varphi)$ sau, echivalent, $\varphi(x) \geqslant -\frac{1}{\alpha}(x^*, x) + \frac{1}{\alpha}(x^*, x_0) + \varphi(x_0) - \varepsilon$, $\forall x \in D(\varphi)$. Aşadar (1.25) este îndeplinită cu $y_0 = -\frac{1}{\alpha} x^*$ şi $\lambda_0 = \frac{1}{\alpha}(x^*, x_0) + \varphi(x_0)$. ■

Teorema 1.9. *Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ proprie, convexă şi semicontinuă inferior. Atunci φ este continuă în orice punct interior mulţimii $D(\varphi)$.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \text{Int } D(\varphi)$. Să arătăm că φ este continuă în x_0. Fără a se restrînge generalitatea se poate presupune că $x_0 = 0$ şi $\varphi(x_0) = 0$. Într-adevăr, φ este continuă în x_0 dacă şi numai dacă funcţia $x \to \varphi(x + x_0) - \varphi(x_0)$ este continuă în $x = 0$. Pentru $\varepsilon > 0$ mulţimea de nivel $A = \{x \in H;\ \varphi(x) \leqslant \varepsilon\}$ este convexă, închisă şi absorbantă deci A este o vecinătate a originii în H. Prin urmare $\limsup_{x \to 0} \varphi(x) \leqslant 0 = \varphi(0)$.

Acest fapt încheie demonstraţia întrucît φ este prin ipoteză şi semicontinuă inferior. ■

Teorema 1.10. *Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ o funcţie proprie, convexă şi semicontinuă inferior. Presupunem că*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty. \tag{1.26}$$

Atunci există $x_0 \in D(\varphi)$ astfel încît $\varphi(x_0) = \inf_{x \in H} \varphi(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Notăm $d = \inf_{x \in H} \varphi(x)$. Evident, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există $x_n \in D(\varphi)$ astfel încît

$$d \leqslant \varphi(x_n) \leqslant d + 1/n. \tag{1.27}$$

Condiția (1.26) implică atunci că șirul $\{x_n\}$ este mărginit. Deci există un subșir $\{x_{n_k}\}$ slab convergent la un $x_0 \in H$. Deoarece φ este convexă și semicontinuă inferior rezultă că φ este slab semicontinuă inferior. Astfel, luînd în (1.27) $n = n_k$ și trecînd apoi la limită pentru $k \to \infty$ se obține că $\varphi(x_0) = d$. ■

Teorema 1.11. *Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ proprie, convexă și semicontinuă inferior. Atunci conjugata sa φ^*, adică funcția definită prin $\varphi^*(y) = \sup_{x \in H} \{(x, y) - \varphi(x)\}$, este de asemenea proprie, convexă și inferior semicontinuă pe H.*

Demonstrație. Evident φ^* nu ia valoarea $-\infty$ și este convexă. Mai mult, în virtutea Teoremei 1.8, $\varphi^* \not\equiv +\infty$. Într-adevăr, conform relației (1.25) avem $\varphi^*(y_0) \leqslant -\lambda_0$. Întrucît este supremumul unei familii de funcții afine φ^* este semicontinuă inferior pe H. Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Definiție. Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ o funcție proprie și convexă. *Subdiferențiala* funcției φ, notată $\partial\varphi$, este operatorul (în general multivoc) definit de la H la H prin relația

$$\partial\varphi(x) = \{w \in H ;\ \varphi(x) - \varphi(v) \leqslant (w, x - v), \quad \forall v \in H\}.$$

Ca o primă observație $D(\partial\varphi) \subset D(\varphi)$. De remarcat apoi că $\partial\varphi$ este un operator monoton.

Să ilustrăm definiția de mai sus prin cîteva exemple.

Exemplul 1. Fie $K \subset H$ o mulțime convexă și închisă și fie I_K funcția indicatoare asociată. Atunci $\partial I_K(x) = \{y \in H ;\ (x - u, y) \geqslant 0, \forall u \in K\}$, $\forall x \in K$. Deci $D(\partial I_K) = D(I_K) = K$. Desigur dacă $x \in \operatorname{Int} K$, atunci $\partial I_K(x) = \{0\}$, iar dacă x este pe frontiera mulțimii K, aunci $\partial I_K(x)$ coincide cu conul normalelor la K în punctul x.

Exemplul 2. Fie $\varphi : H \to \mathbf{R}$, definită prin $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, $\forall x \in H$.

În acest caz $\partial\varphi$ coincide cu operatorul identitate I pe H. Într-adevăr, fixînd un x arbitrar în H avem

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|v\|^2 \leqslant \|x\|^2 - (x, v) = (x, x - v), \quad \forall v \in H.$$

Așadar $x \in \partial\varphi(x)$. Invers, fie $w \in \partial\varphi(x)$. Deci

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 + (w, x - v), \quad \forall v \in H.$$

Să luăm în această inegalitate $v = x + ty$, $t > 0$, $y \in H$. Astfel obținem $(w - x, y) \leqslant \frac{1}{2} t\|y\|^2$, $t > 0$, $y \in H$, deci, pentru $t \to 0$, avem $(w - x, y) \leqslant 0$, $\forall y \in H$. Așadar $w = x$. Deci $\partial\varphi = I$.

Exemplul 3. Dacă φ este convexă și diferențiabilă Gâteaux într-un punct x, atunci $\partial\varphi(x)$ conține doar un element, anume diferențiala

Scanned with OKEN Scanner

Gâteaux a funcției φ în x, adică $\partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$. Într-adevăr, convexitatea funcției φ arată că

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \frac{\varphi(x+\lambda(y-x)) - \varphi(x)}{\lambda} = \nabla(\varphi(x), y-x).$$

Deci $\nabla\varphi(x) \in \partial\varphi(x)$. De asemenea, dacă $y \in \partial\varphi(x)$, atunci $\varphi(x+\lambda z) - \varphi(x) \geqslant \lambda(y, z)$, $\forall z \in H$ și deci $(\nabla\varphi(x), z) = (y, z)$, $\forall z \in H$, adică $y = \nabla\varphi(x)$.

Teorema 1.12. *Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ o funcție proprie, convexă și semicontinuă inferior. Atunci $\partial\varphi$ este un operator maximal monoton.*

Demonstrație. Am remarcat deja mai sus că $\partial\varphi$ este operator monoton. Conform Teoremei 1.2 maximalitatea lui $\partial\varphi$ este echivalentă cu condiția $R(I+\partial\varphi) = H$. Vom arăta așadar că pentru $x^* \in H$ arbitrar dar fixat ecuația

$$x + \partial\varphi(x) \ni x^* \tag{1.28}$$

admite o soluție $x_0 \in D(\partial\varphi)$. Pentru aceasta considerăm funcția $\tilde{\varphi} : H \to]-\infty, +\infty]$ definită prin $\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \varphi(x) - (x, x^*)$. Evident $\tilde{\varphi}$ este de asemenea proprie, convexă și semicontinuă inferior. Mai mult, ținînd seama de Teorema 1.8, avem $\lim_{\|x\|\to\infty} \tilde{\varphi}(x) = +\infty$. Astfel, conform Teoremei 1.10, există $x_0 \in D(\varphi)$ astfel încît $\tilde{\varphi}(x_0) \leqslant \tilde{\varphi}(x)$, $\forall x \in H$. Prin urmare $\varphi(x_0) - \varphi(x) \leqslant (x^*, x_0 - x) + \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x_0\|^2 \leqslant (x^* - x, x_0 - x)$, $\forall x \in H$. În ultima inegalitate luăm $x = tx_0 + (1-t)v$, $0 < t < 1$ și $v \in H$. Atunci, în baza convexității lui φ,

$$\varphi(x_0) - \varphi(v) \leqslant (x^* - x_0, x_0 - v) + (1-t)\|x_0 - v\|^2.$$

Trecînd la limită pentru $t \to 1$ obținem $\varphi(x_0) - \varphi(v) \leqslant (x^* - x_0, x_0 - v)$, $\forall v \in H$. Prin urmare $x^* - x_0 \in \partial\varphi(x_0)$, adică x_0 verifică (1.28). ∎

Teorema 1.13. *Să admitem din nou că $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ este proprie, convexă și semicontinuă inferior. Atunci*

(i) $\overline{D(\partial\varphi)} = \overline{D(\varphi)}$,

(ii) $\operatorname{Int} D(\partial\varphi) = \operatorname{Int} D(\varphi)$,

(iii) $(\partial\varphi)^{-1} = \partial\varphi^*$, *unde φ^* notează conjugata lui φ.*

Demonstrație. (i) Fie x arbitrar dar fixat în $D(\varphi)$ și $x_\lambda = (I+\lambda\partial\varphi)^{-1}x$, $\lambda > 0$, adică $0 \in x_\lambda - x + \lambda\partial\varphi(x_\lambda)$.

Înmulțind scalar această ecuație cu $x_\lambda - x$ și ținînd seama de definiția subdiferențialei obținem

$$\|x_\lambda - x\|^2 = -\lambda(x_\lambda - x, \partial\varphi(x_\lambda)) \leqslant \lambda(\varphi(x) - \varphi(x_\lambda)). \tag{1.29}$$

Ținînd seama de Teorema 1.8 și de estimarea (1.29) deducem că $\lim_{\lambda\to 0}\|x_\lambda - x\| = 0$. Amintind că $x_\lambda \in D(\partial\varphi)$, rezultă că $D(\partial\varphi)$ este o mulțime densă în $D(\varphi)$, deci (i) este dovedită.

(ii) Dacă $\operatorname{Int} D(\varphi) = \emptyset$, atunci rezultatul urmează în mod banal. Presupunem deci că $\operatorname{Int} D(\varphi) \neq \emptyset$ și fie $x \in \operatorname{Int} D(\varphi)$ arbitrar dar fixat.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, conform Teoremei 1.9, φ este continuă în x. Deci $[x, \varphi(x) + \varepsilon] \in$ $\in$ Int (Epi φ) pentru orice $\varepsilon > 0$. Așadar Epiφ este o mulțime convexă cu interior nevid. Din teorema lui Hahn-Banach, forma geometrică (vezi, de exemplu, V. Barbu și T. Precupanu [1, p. 17]) există un hiperplan închis în $H \times \mathbf{R}$ care conține punctul $[x, \varphi(x)]$ și lasă de aceeași parte Epi φ. Cu alte cuvinte, există $[x^*, \alpha] \in H \times \mathbf{R} \setminus \{[0,0]\}$ astfel încît

$$(1.30) \qquad (x^*, x) + \alpha\varphi(x) \leqslant (x^*, y) + \alpha t, \quad \forall [y, t] \in \text{Epi } \varphi.$$

Să remarcăm că $\alpha \neq 0$ deoarece în caz contrar din (1.30) și din faptul că $x \in$ Int $D(\varphi)$ ar rezulta că $x^* = 0$ ceea ce nu este posibil.

Mai mult, deoarece $[y, t + n] \in$ Epi φ, $\forall n \in \mathbf{N}$ de îndată ce $[y, t] \in$ $\in$ Epi φ, urmează că $\alpha > 0$. Luînd în (1.30) $t = \varphi(y)$, $y \in D(\varphi)$ rezultă $x \in D(\partial\varphi)$. În concluzie Int $D(\varphi) \subset D(\partial\varphi)$, deci afirmația (ii) este dovedită.

(iii) Presupunem că $[x, y] \in (\partial\varphi)^{-1}$ sau $x \in \partial\varphi(y)$. Deci $\varphi(y) - \varphi(v) \leqslant$ $\leqslant (x, y - v)$, $\forall v \in H$ sau $(x, v) - \varphi(v) \leqslant (x, y) - \varphi(y)$, $\forall v \in H$. Prin urmare $\varphi^*(x) = (x, y) - \varphi(y)$. Aceasta implică $\varphi^*(x) - \varphi^*(z) \leqslant (y, x - z)$, $\forall z \in H$, adică $y \in \partial\varphi^*(x)$. În concluzie $(\partial\varphi)^{-1} \subset \partial\varphi^*$ ceea ce atrage după sine egalitatea (iii) datorită maximalității operatorului $(\partial\varphi)^{-1}$. ■

Definiție. Pentru $\lambda > 0$ se definește *funcția regularizată* a lui φ prin

$$\varphi_\lambda(x) = \inf \left\{ \frac{1}{2\lambda} \| x - y \|^2 + \varphi(y) \, ; \, y \in H \right\}, \quad \forall x \in H.$$

Teorema 1.14. *Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ o funcție proprie, convexă și semicontinuă inferior. Atunci $\forall \lambda > 0$, φ_λ este convexă și diferențiabilă Fréchet pe H. Dacă se notează $A = \partial\varphi$, atunci avem*

$$(j) \qquad A_\lambda = \partial\varphi_\lambda, \quad \forall \lambda > 0,$$

unde A_λ reprezintă aproximanta Yosida a lui A. In plus

$$(jj) \qquad \varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda} \| x - J_\lambda x \|^2 + \varphi(J_\lambda x), \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda > 0,$$

unde J_λ notează rezolventa lui A,

$$(jjj) \qquad \varphi(J_\lambda x) \leqslant \varphi_\lambda(x) \leqslant \varphi(x), \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda > 0,$$

$$(jv) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \varphi_\lambda(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in H.$$

Demonstrație. Pentru un $\lambda > 0$ și $x \in H$ fixați considerăm funcția $\psi(y) = \frac{1}{2\lambda} \| x - y \|^2 + \varphi(y)$, $y \in H$. Deoarece φ satisface condiția (1.25) (din Teorema 1.8) avem $\lim_{\|y\| \to +\infty} \psi(y) = +\infty$. Deci, conform Teoremei 1.10, φ_λ este peste tot finită pe H.

Se verifică de asemenea ușor că φ_λ este convexă.

Pentru a arăta (jj) să remarcăm că $\frac{1}{\lambda}(y - x) + \partial\varphi(y) \subset \partial\psi(y)$, $\forall y \in D(\partial\varphi)$. Pe de altă parte vectorul $y = J_\lambda x$ este unica soluție a ecuației $0 \in \frac{1}{\lambda}(y - x) + \partial\varphi(y)$. Prin urmare avem $0 \in \partial\psi(J_\lambda x)$ ceea ce arată că

Scanned with OKEN Scanner

$J_\lambda x$ realizează minimul funcției ψ, adică (jj) este dovedită. Din (jj) și din definiția regularizatei rezultă și afirmația (jjj). În demonstrația punctului (i) al Teoremei 1.13 am văzut că pentru orice $x \in D(\varphi)$, $\lim_{\lambda \to 0} \| J_\lambda x - x \| = 0$.

Ținînd seama de acest fapt și de semicontinuitatea inferioară a funcției φ se poate trece la limită în (jjj) și se obține (jv) deocamdată pentru toți $x \in D(\varphi)$. Pentru a încheia demonstrația afirmației (jv) trebuie arătat că pentru $x \notin D(\varphi)$

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi_\lambda(x) = +\infty. \tag{1.31}$$

Presupunem, prin contradicție, că (1.31) n-ar fi adevărată. Deci există un șir $\{\lambda_n\}$ de numere pozitive convergent la 0 astfel încît

$$\varphi_{\lambda_n}(x) \leqslant C < \infty. \tag{1.32}$$

Din (jjj) rezultă atunci

$$\varphi(J_{\lambda_n} x) \leqslant C. \tag{1.33}$$

Pe de altă parte, cum φ este mărginită inferior de o funcție afină iar $\{J_{\lambda_n} x\}$ este un șir mărginit (vezi Teorema 1.3), rezultă că

$$\{\varphi(J_{\lambda_n} x)\} \text{ este un șir mărginit.} \tag{1.34}$$

Astfel, (1.32), (1.34) și (jj) arată că $J_{\lambda_n} x \to x$.

Trecînd la limită în (1.33) se obține că $x \in D(\varphi)$ ceea ce este o contradicție. Pentru a termina demonstrația teoremei rămîne de arătat că $\forall \lambda > 0$ și $\forall x \in H$, φ_λ este diferențiabilă Fréchet în x și are loc (j). Folosind relația (jj) se deduce ușor că $\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) \leqslant (A_\lambda(y), y - x)$, $\forall x, y \in H$, $\lambda > 0$. Deci

$$0 \leqslant \varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) - (A_\lambda(x), y - x) \leqslant (A_\lambda(y) - A_\lambda(x), y - x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} \| x - y \|^2, \quad \forall x, y \in H, \lambda > 0,$$

conform Teoremei 1.3, (iii). Așadar φ_λ este diferențiabilă Fréchet pe H și $\partial \varphi_\lambda(x) = \{\nabla \varphi_\lambda(x)\} = A_\lambda(x)$, $\forall x \in H$. ■

Observația 1.5. Dacă $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ este proprie și convexă, atunci este ușor de văzut că $\partial \varphi$ este un operator *ciclic monoton* adică pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem

$$(x_0 - x_1, x_0^*) + \ldots + (x_{n-1} - x_n, x_{n-1}^*) + (x_n - x_0, x_n^*) \geqslant 0, \text{ pentru}$$

$$[x_i, x_i^*] \in \partial \varphi, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1.35}$$

Un operator $A : D(A) \subset H \to H$ se numește *maximal ciclic monoton* dacă A este ciclic monoton și nu are extensii ciclic monotone proprii. Evident, dacă φ este proprie, convexă și semicontinuă inferior, atunci $\partial \varphi$ este maximal ciclic monoton. Se poate arăta și invers că dacă A este un operator maximal ciclic monoton, atunci există o funcție φ proprie, convexă și semicontinuă inferior, determinată unic pînă la o constantă aditivă, astfel încît $A = \partial \varphi$.

Scanned with OKEN Scanner

Să mai amintim că un operator $A: D(A) \subset H \to H$ se numește *trimonoton* dacă A satisface (1.35) pentru $n = 2$.

Vom încheia acest paragraf cu cîteva exemple importante de subdiferențiale. Un exemplu remarcabil pe care l-am considerat deja anterior este subdiferențiala funcției indicatoare I_K asociată unei mulțimi nevide, convexe și închise $K \subset H$. Cum I_K este proprie, convexă și semicontinuă inferior rezultă că ∂I_K este operator maximal monoton. Să mai amintim cîteva exemple necesare în cele ce urmează.

a) *Grafuri maximal monotone în* $\mathbf{R}^2$

Propoziția 1.3. *Fie* $\beta: D(\beta) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o aplicație maximal monotonă. Atunci există o funcție* $j: \mathbf{R} \to]-\infty, +\infty]$ *convexă și semicontinuă inferior astfel încît* $\beta = \partial j$.

Demonstrație. Să remarcăm mai întîi că există $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ astfel încît $]a, b[\subset D(\beta) \subset [a, b]$. Fie $x_0 \in D(\beta)$. Atunci, funcția $j: \mathbf{R} \to]-\infty, +\infty]$ definită prin

$$j(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^{x} \beta^0(s)ds, & \text{dacă } x \in [a, b] \\ +\infty, & \text{dacă } x \notin [a, b] \end{cases}$$

este proprie, convexă și semicontinuă inferior. De asemenea, pentru $x \in D(\beta)$, avem $j(x) - j(y) = \int_y^x \beta^0(s)\, ds \leqslant w(x - y), \quad \forall w \in \beta(x), \ \forall y \in \mathbf{R}$. Prin urmare $\beta(x) \subset \partial j(x), \ \forall x \in D(\beta)$. Întrucît β este maximal monoton rezultă că β coincide cu ∂j.

b) *Operatori autoadjuncți pozitivi*

Propoziția 1.4. *Fie* $A: D(A) \subset H \to H$ *un operator univoc, liniar autoadjunct și pozitiv. Atunci funcția* $\varphi: H \to]-\infty, +\infty]$ *definită prin*

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1/2)\| A^{1/2}(x)\|^2, & \text{dacă } x \in D(A^{1/2}) \\ +\infty, & \text{în rest} \end{cases}$$

este proprie, convexă și semicontinuă inferior și A *coincide cu subdiferențiala funcției* φ.

Demonstrație. Vom arăta pentru început că A este maximal monoton adică $R(I + A) = H$. Să observăm mai întîi că $R(I + A)$ este o mulțime închisă. Într-adevăr, dacă $f_n = u_n + A(u_n)$ și $f_n \to f$ tare în H, atunci, datorită pozitivității operatorului A, avem $\| u_n - u_m\| \leqslant \|f_n - f_m\|$. Deci u_n converge tare în H la un vector u și atunci rezultă că $f - u = \lim (f_n - u_n) = A(u)$. Așadar $R(I+A)$ este o mulțime închisă. Să arătăm în continuare că de fapt $R(I + A) = H$. Pentru aceasta fie w arbitrar în spațiul ortogonal al lui $R(I + A)$, notat $R(I + A)^{\perp}$, adică avem: $(w, v + A(v)) = 0, \ \forall v \in D(A)$, sau: $(A(v), w) = -(w, v), \ \forall v \in D(A)$. Deoarece A este autoadjunct rezultă atunci că $w \in D(A)$ și $w + A(w) = 0$. Cum A este și pozitiv urmează că $w = 0$, adică $R(I + A)^{\perp} = \{0\}$. Acest fapt arată clar că într-adevăr $R(I + A) = H$. Este de asemenea evident că funcția φ definită în enunț este proprie, convexă și semicontinuă inferior (deoarece $A^{1/2}$ este închis). Deoarece, pentru $x \in D(A)$, $(1/2)\| A^{1/2}(x)\|^2 - (1/2)\| A^{1/2}(v)\|^2 \leqslant (A(x), x - v), \ \forall v \in D(A^{1/2})$ rezultă $A \subset \partial\varphi$. Atunci, faptul

că A este maximal monoton implică $A = \partial\varphi$. Astfel Propoziția 1.4 este complet demonstrată. ■

c) *Extensii canonice de subdiferențiale la* $L^2(\Omega; H)$

Propoziția 1.5. *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$ *cu* $\text{măs}(\Omega) < +\infty$ *și* $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *o funcție proprie, convexă și seicontinuă inferior. Se definește funcția* $\Phi : L^2(\Omega; H) \to]-\infty, +\infty]$ *prin*

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_\Omega \varphi(u(\xi))\, d\xi, & \text{dacă } \varphi \circ u \in L^1(\Omega) \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

(Deoarece φ *este mărginită inferior de o funcție afină,* Φ *nu poate lua valoarea* $-\infty$*). Atunci* Φ *este proprie, convexă și semicontinuă inferior și* $\partial\Phi = \bar{A}$*, unde* $\bar{A}$ *este extensia operatorului* $A = \partial\varphi$ *la* $L^2(\Omega; H)$*. In plus*

$$\Phi_\lambda(u) = \int_\Omega \varphi_\lambda(u(\xi))\, d\xi, \forall \lambda > 0, \forall u \in L^2(\Omega; H) \tag{1.36}$$

și

$$\overline{D(\Phi)}^{L^2(\Omega;H)} = \{u \in L^2(\Omega; H);\ u(\xi) \in \overline{D(\varphi)}^H, \text{ a.p.t. } \xi \in \Omega\}. \tag{1.37}$$

Demonstrație. Evident Φ este proprie (deoarece $D(\Phi)$ conține cel puțin funcțiile constante cu valori în $\overline{D(\varphi)}$) și convexă. În cele ce urmează vom arăta că Φ este semicontinuă inferior pe $L^2(\Omega; H)$ sau, echivalent, $\forall t \in \mathbf{R}$ mulțimea de nivel $M = \{u \in L^2(\Omega; H);\ \Phi(u) \leqslant t\}$ este închisă în $L^2(\Omega; H)$. Pentru aceasta fie șirul $\{u_m\} \subset M$ astfel încît $u_m \to u$ tare în $L^2(\Omega; H)$. Se poate presupune că $u_m(\xi) \to u(\xi)$, a.p.t. $\xi \in \Omega$. Pentru $[x_0, y_0] \in \partial\varphi$, definim funcția $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) - (y_0, x - x_0)$. Evident $\tilde{\varphi}$ este convexă, semicontinuă inferior și $\tilde{\varphi} \geqslant 0$ pe H. În plus, $\forall u \in L^2(\Omega; H)$, $\varphi \circ u$ (deci și $\tilde{\varphi} \circ u$) este măsurabilă. Conform lemei lui Fatou $\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \varphi(u_m(\xi))\, d\xi \geqslant \int_\Omega \tilde{\varphi}(u(\xi))\, d\xi$, fapt care conduce imediat la $\Phi(u) \leqslant t$. Pentru a demonstra că $\bar{A} = \partial\Phi$ este suficient să arătăm că $\bar{A} \subset \partial\Phi$. Pentru aceasta fie $[u, v] \in \bar{A}$, deci $v(\xi) \in A(u(\xi))$ a.p.t. $\xi \in \Omega$. Așadar

$$\varphi(u(\xi)) - \varphi(w(\xi)) \leqslant (v(\xi),\ u(\xi) - w(\xi)), \text{ a.p.t. } \xi \in \Omega,\ \forall w \in D(\Phi).$$

Deci $\varphi \circ u \in L^1(\Omega)$ și integrînd ultima inegalitate obținem

$$\Phi(u) - \Phi(w) \leqslant \int_\Omega (v(\xi),\ u(\xi) - w(\xi))\, d\xi,\ \forall w \in D(\Phi).$$

Deci $v \in \partial\Phi(u)$. Relația (1.36) rezultă astfel:

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2\lambda} \|u - (I + \lambda\bar{A})^{-1}u\|^2_{L^2(\Omega;H)} + \Phi((I + \lambda\bar{A})^{-1}u) =$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega \|u(\xi) - (I + \lambda A)^{-1}\, u(\xi)\|^2\, d\xi + \int_\Omega \varphi((I + \lambda A)^{-1}\, u(\xi))\, d\xi =$$

$$= \int_\Omega \varphi_\lambda(u(\xi))\, d\xi,\ \forall u \in L^2(\Omega; H).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta (1.37) să observăm mai intîi că $D(\Phi) \subset \{u \in L^2(\Omega; H);$ $u(\xi) \in D(\varphi)$, a.p.t. $\xi \in \Omega\}$.

Prin urmare pentru a demonstra (1.37) este suficient să arătăm că $\forall \partial \in L^2(\Omega; H)$ cu $u(\xi) \in \overline{D(\varphi)}^H$ a.p.t. $\xi \in \Omega$ avem $u \in \overline{D(\Phi)}^{L^2(\Omega; H)}$. Pentru o asemenea funcție u definim

$$u_\lambda(\xi) = (I + \lambda A)^{-1} u(\xi), \ \lambda > 0, \text{ a.p.t. } \xi \in \Omega.$$

Conform Teoremei 1.3 (vi) și Teoremei 1.13, (i) avem

$$\lim_{\lambda \to 0} \| u_\lambda(\xi) - u(\xi) \| = 0, \text{ a.p.t. } \xi \in \Omega. \tag{1.38}$$

Pe de altă parte, întrucît $(I + \lambda A)^{-1}$ este neexpansiv,

$$\| u_\lambda(\xi) \| \leqslant \| u(\xi) \| + \text{Const.}, \ \forall \lambda > 0, \text{ a.p.t. } \xi \in \Omega. \tag{1.39}$$

În baza relațiilor (1.38), (1.39) se poate aplica teorema de dominare a lui Lebesgue pentru a deduce că $u_\lambda \to u$, tare în $L^2(\Omega; H)$. Cum $u_\lambda = (I + \lambda \bar{A})^{-1} u \in D(\bar{A})$ rezultă atunci că $u \in \overline{D(\Phi)}^{L^2(\Omega; H)}$.

Astfel (1.37) este dovedită și demonstrația propoziției încheiată. ■

Notă bibliografică. Informații suplimentare în legătură cu această secțiune pot fi găsite în V. Barbu [1,6], V. Barbu și T. Precupanu [1], H. Brézis [1] ș.a.

De remarcat că principalele contribuții în analiza convexă au fost aduse de J. J. Moreau, R. T. Rockafellar și H. Brézis.

§ 2. EXISTENȚA ȘI REGULARITATEA SOLUȚIILOR PENTRU ECUAȚII DE EVOLUȚIE ÎN SPAȚII HILBERT

La fel ca în paragraful precedent fie H un spațiu Hilbert real cu produsul scalar și norma hilbertiană asociată notate cu $(.,.)$ și respectiv $\|\cdot\|$. De asemenea, toate celelalte notații din paragraful precedent se păstrează.

Considerăm problema Cauchy

$$du/dt + A(u) \ni f(t), \quad 0 < t < T, \tag{E}$$

$$u(0) = u_0, \tag{C.I.}$$

unde $A : D(A) \subset H \to H$ este un operator (posibil multivoc) iar u_0 și funcția f sînt date.

Definiția 2.1. Fie $f \in L^1(0, T; H)$. Vom spune că funcția $u \in C([0,T]; H)$ este *soluție* (sau *soluție tare*) pentru problema Cauchy (E), (C.I.) dacă:

(2.1) u este absolut continuă pe orice compact din $]0, T[$,

(2.2) $u(t) \in D(A)$ a.p.t. $t \in]0, T[$,

(2.3) $u(0) = u_0$ și u satisface (E) a.p.t. $t \in]0, T[$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.2. Funcția $u \in C([0, T]; H)$ se numește *soluție slabă* pentru problema Cauchy (E), (C.I.) dacă există șirurile $\{u_n\} \subset W^{1,\infty}(0,T;H)$ și $\{f_n\} \subset L^1(0, T; H)$ astfel încît

$$\frac{du_n}{dt}(t) + A(u_n(t)) \ni f_n(t), \text{ a.p.t. } t \in]0, T[, \ n = 1,2,\ldots \tag{2.4}$$

$$u_n \to u \text{ în } C([0,T]; H), \tag{2.5.}$$

$$u(0) = u_0 \text{ și } f_n \to f \text{ în } L^1(0, T; H). \tag{2.6}$$

Vom aminti acum o lemă de tip Gronwall foarte utilă în cele ce urmează. Demonstrația este elementară (vezi H. Brézis [1, Appendice]).

Lema 2.1. *Fie* $\psi \in L^1(t_0, T)$ *astfel încît* $\psi \geqslant 0$ *a.p.t. pe* $]t_0, T[$ *și fie* a *o constantă reală. Dacă* $h \in C([t_0, T])$ *verifică inegalitatea* $\frac{1}{2}h^2(t) \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\, h(s)\, ds$, $\forall t \in [t_0, T]$ *atunci are loc și inegalitatea* $|h(t)| \leqslant |a| + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\, ds$, $\forall t \in [t_0, T]$.

Teorema 2.1. *Fie* $A : D(A) \subset H \to H$ *un operator maximal monoton. Atunci pentru* $u_0 \in D(A)$ *și* $f \in W^{1,1}(0, T; H)$ *problema Cauchy* (E), (C.I.) *admite o soluție tare unică* $u \in W^{1,\infty}(0, T; H)$.

În plus, u *este derivabilă la dreapta în orice punct din intervalul* $[0, T[$ *și*

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t) - A(u(t)))^0, \ \forall t \in [0, T[, \tag{2.7}$$

$$\left\| \frac{d^+u}{dt}(t) \right\| \leqslant \|(f(0) - A(u_0))^0\| + \int_0^t \left\| \frac{df}{ds}(s) \right\| ds, \ \forall t \in [0, T[, \tag{2.8}$$

unde $(f(t) - A(u(t)))^0$ *reprezintă elementul de normă minimă al mulțimii* $f(t) - A(u(t))$.

Dacă u *și* v *sînt soluțiile asociate perechilor* $(u_0, f), (v_0, g) \in D(A) \times W^{1,1}(0, T; H)$ *atunci*

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant \|u_0 - v_0\| + \int_0^t \|f(s) - g(s)\|\, ds, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.9}$$

Demonstrație. Demonstrăm mai întîi (2.9) deci și unicitatea. Deoarece A este monoton se obține imediat

$$\left(\frac{du}{dt}(t) - \frac{dv}{dt}(t),\ u(t) - v(t) \right) \leqslant \|f(t) - g(t)\| \cdot \|u(t) - v(t)\|, \text{ a.p.t. } t \in]0, T[$$

sau

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 \leqslant \|f(t) - g(t)\| \cdot \|u(t) - v(t)\|, \text{ a.p.t. } t \in]0, T[$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd această inegalitate pe $[0, t]$ deducem

$$\frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u_0-v_0\|^2+\int_0^t \|f(s)-g(s)\|\cdot\|u(s)-v(s)\|\,ds,$$

$\forall t \in [0, T]$.

Aplicînd Lema 2.1 rezultă (2.9).

Pentru a arăta existenţa să remarcăm mai întîi că din teoria clasică de existenţă, pentru orice $\lambda > 0$, există $u_\lambda \in C^1([0, T]; H)$ verificînd problema Cauchy aproximativă

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t)+A_\lambda(u_\lambda(t))=f(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.10}$$

$$u_\lambda(0)=u_0. \tag{2.11}$$

Această afirmaţie se bazează pe faptul că, $\forall \lambda > 0$, A_λ este operator lipschitzian pe H. Deoarece A_λ este monoton avem $\left(\frac{d}{dt}(u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)\right),$ $u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)) \leqslant (f(t+h)-f(t), u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t))$, $\forall t, t+h \in [0, T]$. Deci, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)\|^2 \leqslant \|f(t+h)-f(t)\|\cdot\|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)\|$, $\forall t, t+h \in [0, T]$.

Integrînd ultima inegalitate pe $[0, t]$ obţinem

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u_\lambda(h)-u_0\|^2+$$

$$\int_0^t \|f(s+h)-f(s)\|\cdot\|u_\lambda(s+h)-u_\lambda(s)\|\,ds,\ \forall t,\ t+h \in [0,\ T].$$

Atunci, conform Lemei 2.1,

$$\|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)\| \leqslant \|u_\lambda(h)-u_0\|+\int_0^t \|f(s+h)-f(s)\|ds, \tag{2.12}$$

$\forall t,\ t+h \in [0,\ T]$.

Împărţind (2.12) prin $h > 0$ şi apoi trecînd la limită cînd $h \to 0$ se deduce

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| \leqslant \|f(0)-A_\lambda(u_0)\|+\int_0^t \left\|\frac{df}{ds}(s)\right\|ds \leqslant \tag{2.13}$$

$$\leqslant \|f(0)\|+\|A^0(u_0)\|+\int_0^T \left\|\frac{df}{ds}(s)\right\|ds,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Prin urmare, ţinînd seama de (2.10), avem

$$\|A_\lambda(u_\lambda(t))\| \leqslant \|f(t)\|+\|f(0)\|+\|A^0(u_0)\|+\int_0^T \left\|\frac{df}{ds}(s)\right\|ds \leqslant \tag{2.14}$$

$$\leqslant \text{Const.},\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Scanned with OKEN Scanner

În continuare vom arăta că $\{u_\lambda\}$ este Cauchy în spaţiul $C([0,T];H)$, pentru $\lambda \to 0$. Astfel, înmulţind scalar ecuaţia $\frac{du_\lambda}{dt}(t) - \frac{du_\mu}{dt}(t) + A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)) = 0$, $\lambda, \mu > 0$; $t \in [0, T]$ cu $u_\lambda - u_\mu$ obţinem

$$(2.15)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 = -(A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)),\ \lambda A_\lambda(u_\lambda(t)) - \mu A_\mu(u_\mu(t))) - (A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t)),\ J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Deoarece $A_\lambda(u_\lambda(t)) \in A(J_\lambda u_\lambda(t))$ se deduce din (2.15), ţinîndu-se cont şi de (2.14), $\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leqslant \text{Const.}(\lambda + \mu)$, $\forall \lambda, \mu > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Prin urmare

$$2.16)\quad \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \text{Const.}\sqrt{(\lambda + \mu)t},\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Dar (2.16) spune că există $u:[0, T] \to H$ astfel încît

$$(2.17)\quad u_\lambda \to u, \text{ pentru } \lambda \to 0, \text{ în } C([0, T]; H).$$

Evident $u(0) = u_0$.

Din (2.13) urmează atunci că $u \in W^{1,\infty}(0, T; H)$ şi pentru $\lambda \to 0$

$$(2.18)\quad du_\lambda/dt \to du/dt \text{ slab stelat în } L^\infty(0, T; H)$$

(deci, în particular, slab în $L^2(0, T; H)$). Deci, pentru $\lambda \to 0$,

$$(2.19)\quad A_\lambda(u_\lambda) \to f - du/dt, \text{ slab stelat în } L^\infty(0, T; H).$$

De asemenea, în virtutea estimării (2.14) avem

$$(2.20)\quad J_\lambda u_\lambda \to u, \text{ în } C([0, T]; H).$$

Să amintim că extensia lui A la $L^2(0, T; H)$, notată $\bar{A}$, este un operator maximal monoton. Astfel, ţinînd seama de (2.19), (2.20) şi de faptul că $\bar{A}$ este demiînchis se obţine $f - du/dt \in \bar{A}(u)$ adică u verifică a.p.t. ecuaţia (E).

Din (2.14), (2.20) şi faptul că A este demiînchis rezultă că $u(t) \in D(A)$, $\forall t \in]0, T]$. Pentru a dovedi partea a doua a teoremei fie $t_0 \in [0, T[$. Să înmulţim scalar cu $u(t_0 + h) - u(t_0)$ ecuaţia $\frac{d}{dh}(u(t_0 + h) - u(t_0)) \in f(t_0 + h) - A(u(t_0 + h))$, a.p.t. $h > 0$ cu $t_0 + h < T$. Ţinînd cont că A este monoton se obţine atunci $\frac{1}{2}\frac{d}{dh}\|u(t_0 + h) - u(t_0)\|^2 \leqslant \{\|(f(t_0) - A(u(t_0)))^0\| + \|f(t_0 + h) - f(t_0)\|\}\|u(t_0 + h) - u(t_0)\|$.

Integrînd această inegalitate pe $[0, h]$ şi aplicînd apoi Lema 2.1 obţinem

$$2.21)\quad \|u(t_0 + h) - u(t_0)\| \leqslant h\|(f(t_0) - A(u(t_0)))^0\| + \int_0^h \|f(t_0 + s) - f(t_0)\|ds,\ \forall h > 0 \text{ astfel încît } t_0 + h < T.$$

Prin urmare

$$\text{(2.22)} \qquad \limsup_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \|u(t_0 + h) - u(t_0)\| \leqslant \|(f(t_0) - A(u(t_0)))^0\|.$$

Pe de altă parte, cum u este soluție tare pentru (E), (C.I.) avem

$$\frac{1}{2}\|u(t) - x\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u(s) - x\|^2 + \int_s^t (f(s) - y,\ u(s) - x)\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant$$

$$\leqslant T,\ \forall [x, y] \in A.$$

Deci

$$\text{(2.23)} \qquad (u(t_0 + h) - u(t_0),\ u(t_0) - x) \leqslant \frac{1}{2}\|u(t_0 + h) - x\|^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\|u(t_0) - x\|^2 \leqslant \int_{t_0}^{t_0+h} (f(s) - y,\ u(s) - x)\mathrm{d}s,\ \forall h > 0 \text{ cu } t_0 + h < T \text{ și}$$

$$\forall [x, y] \in A.$$

Fie un șir $\{h_n\} \subset]0, +\infty[$, $h_n \to 0$ astfel încît (vezi (2.22))

$$\frac{u(t_0 + h_n) - u(t_0)}{h_n} \to p, \text{ slab în } H.$$

Scriem atunci (2.23) cu $h = h_n$, împărțim apoi inegalitatea prin h_n și trecem la limită. Astfel sîntem conduși la inegalitatea $(p - f(t_0) + y,\ x - u(t_0)) \geqslant 0$, $\forall\ [x, y] \in A$. Atunci maximalitatea lui A și (2.22) implică

$$\text{(2.24)} \qquad p = (f(t_0) - A(u(t_0)))^0.$$

Cum limita p este unică rezultă din (2.22) și (2.24) că există derivata (tare) la dreapta a funcției u în t_0 și $\dfrac{\mathrm{d}^+ u}{\mathrm{d}t}(t_0) = (f(t_0) - A(u(t_0)))^0$, adică u verifică (2.7).

După un procedeu utilizat mai sus

$$\text{(2.25)} \qquad \|u(t + h) - u(t)\| \leqslant \|u(h) - u_0\| + \int_0^t \|f(s + h) - f(s)\|\,\mathrm{d}s,$$

$$\forall t,\ t + h \in [0,\ T].$$

De asemenea,

$$\text{(2.26)} \qquad \|u(h) - u_0\| \leqslant \int_0^h \|(f(s) - A(u_0))^0\|\,\mathrm{d}s,\ \forall h \in [0,\ T].$$

Estimările (2.25) și (2.26) conduc la

$$\|u(t + h) - u(t)\| \leqslant \int_0^h \|(f(s) - A(u_0))^0\|\mathrm{d}s + \int_0^t \|f(s+h) - f(s)\|\,\mathrm{d}s, \text{ pentru}$$

$$t,\ h,\ t + h \in [0,\ T]$$

care implică evident (2.8). Astfel teorema este acum complet demonstrată. ■

Scanned with OKEN Scanner

Observația 2.1. O ușoară extensie a Teoremei 2.1 se obține dacă se consideră A astfel încît $A + \omega I$ este maximal monoton, pentru un $\omega \in \mathbf{R}$. Singurele modificări intervin în estimările (2.8) și (2.9). De exemplu (2.9) devine în acest caz

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant e^{\omega t} \|u_0 - v_0\| + \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f(s) - g(s)\| ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Definiția 2.3. Fie C o submulțime nevidă și închisă în H. *Un semigrup continuu de contracții* (sau, mai scurt, semigrup de contracții) pe C este o mulțime de operatori $\{S(t) : C \to C; t \geqslant 0\}$ satisfăcînd condițiile:

(a) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, $\forall x \in C$; $t, s \geqslant 0$;

(b) $S(0)x = x$, $\forall x \in C$;

(c) $\forall x \in C$, aplicația $t \mapsto S(t)x$ este continuă pe $[0, +\infty[$;

(d) $\|S(t)x - S(t)y\| \leqslant \|x - y\|$, $\forall t \geqslant 0$, $\forall x, y \in C$.

Dacă sînt îndeplinite doar axiomele (a), (b) și (c) atunci $\{S(t) : C \to C; t \geqslant 0\}$ se numește *semigrup continuu* (sau, simplu, semigrup).

Generatorul infinitezimal al unui semigrup $\{S(t) : C \to C; t \geqslant 0\}$, notat cu G, se definește astfel

$$G(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in D(G), \tag{2.27}$$

unde $D(G) = \{x \in C$; limita (2.27) există în topologia tare a lui $H\}$.

Definiția 2.4. Fie C o mulțime nevidă închisă a lui H. O familie de operatori $\{S(t) : C \to C; t \in \mathbf{R}\}$ se numește *grup continuu* dacă

(a)′ $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, $\forall x \in C$, $t, s \in \mathbf{R}$;

(b)′ $S(0)x = x$, $\forall x \in C$;

(c)′ $\forall x \in C$, aplicația $t \mapsto S(t)x$ este continuă pe $\mathbf{R}$. Generatorul infinitezimal al unui grup continuu se definește ca mai sus, numai că limita (2.27) se consideră pentru $h \to 0$ (în loc de $h \downarrow 0$).

Observația 2.2. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton. Considerăm problema Cauchy

$$(E_0) \qquad du/dt + A(u) \ni 0, \quad t > 0,$$

$$(C.I.) \qquad u(0) = u_0.$$

Din Teorema 2.1 rezultă că pentru $u_0 \in D(A)$ există o soluție tare $u(t)$, $t \geqslant 0$ pentru (E_0), (C.I.).

Notăm $u(t) = S(t)u^0$, $t \geqslant 0$.

Întrucît, $\forall t \geqslant 0$, $S(t)$ este o contracție pe $D(A)$ (vezi estimarea (2.9)) urmează că $S(t)$ se poate prelungi la $\overline{D(A)}$ și $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}; t \geqslant 0\}$ este un semigrup de contracții în sensul Definiției 2.3. În virtutea ecuației (2.7) generatorul său infinitezimal este $-A^0$. Acest semigrup se spune că este *semigrupul generat de* $-A$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, conform unui rezultat al lui M. G. Crandall și A. Pazy (vezi H. Brézis [1, p. 114]), dacă C este o mulțime nevidă, convexă și închisă în H și $\{S(t) : C \to C ; t \geqslant 0\}$ este un semigrup de contracții, atunci exixtă un unic operator maximal monoton A astfel încît $\overline{D(A)} = C$ și semigrupul dat coincide cu cel generat de $-A$.

Teorema 2.2. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ *maximal monoton. Atunci, pentru orice* $u_0 \in \overline{D(A)}$ *și orice* $f \in L^1(0, T; H)$, *există o soluție slabă unică pentru problema Cauchy* (E), (C.I.) *care verifică inegalitatea*

$$\frac{1}{2}\|u(t) - x\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u(s) - x\|^2 + \int_s^t (f(s) - y,\ u(s) - x)\mathrm{d}s, \tag{2.28}$$

pentru $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *și* $\forall [x, y] \in A$.

Dacă u *și* v *sînt soluțiile slabe asociate perechilor* $(u_0, f), (v_0, g) \in \overline{D(A)} \times L^1(0, T; H)$ *atunci are loc*

$$\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u(s) - v(s)\|^2 + \int_s^t (f(\tau) - g(\tau),\ u(\tau) - v(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{2.29}$$

pentru $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Demonstrație. Fie $u_0 \in \overline{D(A)}$ și $f \in L^1(0, T; H)$. Atunci există șirurile $\{u_0^n\} \subset D(A)$ și $\{f_n\} \subset W^{1,1}(0, T; H)$ astfel încît

$$u_0^n \to u_0, \text{ în } H; \quad f_n \to f, \text{ în } L^1(0, T; H).$$

Conform Teoremei 2.1 pentru fiecare n natural există $u_n \in W^{1,\infty}(0, T; H)$ astfel încît

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) + A(u_n(t)) \ni f_n(t), \text{ a.p.t. } t \in]0, T[, \\ u_n(0) = u_0^n. \end{cases} \tag{2.30}$$

Atunci, conform inegalității (2.9), $\|u_n(t) - u_m(t)\| \leqslant \|u_0^n - u_0^m\| + \int_0^T \|f_n(s) - f_m(s)\|\mathrm{d}s$. Prin urmare există $u \in C([0, T]; H)$ astfel încît $u_n \to u$ în $C([0, T]; H)$ și în particular $u(0) = u_0$. Deci u este tocmai soluția slabă corespunzătoare perechii (u_0, f). Evident (2.28) și (2.29) au loc pentru soluții tari. Este clar că acestea se păstrează pentru soluții slabe. Astfel teorema este demonstrată. ■

Observația 2.3. Dacă $A : D(A) \subset H \to H$ este maximal monoton și $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)} ; t \geqslant 0\}$ este semigrupul generat de $-A$, atunci $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ funcția $u(t) = S(t)u_0$, $t \geqslant 0$ este soluție slabă pe $[0, +\infty[$ pentru problema Cauchy (E_0), (C.I.). În altă ordine de idei, se cunoaște că în cazuri speciale existența soluției tari are loc chiar dacă $u_0 \notin D(A)$ sau $f \notin W^{1,1}(0, T; H)$. În acest sens vezi rezultatele de mai jos.

Teorema 2.3. *Dacă* H *este spațiu Hilbert de dimensiune finită și* $A : D(A) \subset H \to H$ *este un operator maximal monoton, atunci* $\forall (u_0, f) \in \overline{D(A)} \times L^1(0, T; H)$ *problema* (E), (C.I.) *admite o soluție tare unică.*

Demonstrația (nebanală a) acestui rezultat se găsește în H. Brézis [1, p. 82].

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.4 (H. Brézis). *Fie* $A = \partial\varphi$ ($\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *proprie, convexă și semicontinuă inferior*), $u_0 \in \overline{D(A)}$ și $f \in L^2(0,T;H)$. *Atunci problema Cauchy* (E), (C.I.) *admite o soluție tare unică astfel încît*

$$\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H), \tag{2.31}$$

(2.32) *funcția* $t \mapsto \varphi(u(t))$ *este în* $L^1(0,T)$ *și este absolut continuă pe* $[\delta, T]$, $\forall \delta \in]0,T[$.

Dacă, în plus, $u_0 \in D(\varphi)$, *atunci*

$$du/dt \in L^2(0,T;H) \text{ și} \tag{2.33}$$

$$t \mapsto \varphi(u(t)) \text{ este absolut continuă pe } [0, T]. \tag{2.34}$$

Pentru a demonstra această teoremă este necesară următoarea lemă care va fi utilizată și în alte situații.

Lema 2.2. *Fie* $u \in W^{1,2}(t_0,T;H)$ *astfel încît* $u(t) \in D(\partial\varphi)$ a.p.t. $t \in]t_0,T[$ *și există* $g \in L^2(t_0,T;H)$ *astfel încît* $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$, *a.p.t.* $t \in]t_0,T[$.

Atunci, funcția $t \mapsto \varphi(u(t))$ *este absolut continuă pe* $[t_0,T]$ *și a.p.t.* $t \in]t_0,T[$ *are loc formula*

$$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left(h, \frac{du}{dt}(t)\right), \forall h \in \partial\varphi(u(t)). \tag{2.35}$$

Demonstrație. Evident funcția $t \mapsto \varphi_\lambda(u(t))$, $\lambda > 0$ este derivabilă a.p.t. pe $]t_0,T[$ și

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda(u(t)) = (\nabla\varphi_\lambda(u(t)), \frac{du}{dt}(t)) = ((\partial\varphi)_\lambda(u(t)), \frac{du}{dt}(t)), \text{ a.p.t. } t \in]t_0,T[.$$

Ca de obicei φ_λ notează regularizata funcției φ. Deci

$$\varphi_\lambda(u(t)) - \varphi_\lambda(u(s)) = \int_s^t ((\partial\varphi)_\lambda(u(\tau)), \frac{du}{d\tau}(\tau)d\tau;\ s,t \in [t_0,T]. \tag{2.36}$$

Să observăm că $\lim_{\lambda\to 0}(\partial\varphi)_\lambda(u(t)) = (\partial\varphi)^0(u(t))$, tare în H, a.p.t. $t \in]t_0,T[$ și $\|(\partial\varphi_\lambda)(u(t))\| \leqslant \|(\partial\varphi)^0(u(t))\| \leqslant \|g(t)\|$, a.p.t. $t \in]t_0,T[$. Prin urmare $\partial\varphi_\lambda(u) \to (\partial\varphi)^0(u)$, în $L^2(t_0,T;H)$. Trecînd la limită în (2.36), pentru $\lambda \to 0$, se obține atunci

$$\varphi(u(t)) - \varphi(u(s)) = \int_s^t ((\partial\varphi)^0(u(\tau)), \frac{du}{d\tau}(\tau))d\tau;\ s,t \in [t,T].$$

Așadar $t \mapsto \varphi(u(t))$ este absolut continuă pe $[t_0, T]$. Fie acum $t_1 \in]t_0,T[$ astfel încît $u(t)$ și $\varphi(u(t))$ sînt derivabile în $t = t_1$ și $u(t_1) \in D(\partial\varphi)$. Fie $h \in \partial\varphi(u(t_1))$. Atunci avem $\varphi(u(t_1)) - \varphi(v) \leqslant (h, u(t_1) - v)$, $\forall v \in H$. Luînd în această inegalitate $v = u(t_1 \pm \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ se obține după o împărțire cu ε și trecere la limită $\frac{d}{dt}\varphi(u(t_1)) = \left(h, \frac{du}{dt}(t_1)\right)$. ■

Demonstrația Teoremei 2.4. Fie $[x_0,y_0] \in \partial\varphi$. Introducem funcția $\tilde{\varphi}$: $H \to]-\infty, +\infty]$ definită prin : $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) - (y_0, x - x_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci (E) este echivalentă cu $\frac{du}{dt} + \partial\tilde{\varphi}(u) \ni f(t) - y_0, 0 < t < T$. Deci se poate presupune fără a se restrînge generalitatea că $\min_{u \in H} \varphi(u) = \varphi(x_0) = 0$.

Pentru a demonstra teorema vom presupune în prima etapă că $u_0 \in D(\partial\varphi)$ și $f \in W^{1,2}(0,T;H)$. Atunci, conform Teoremei 2.1, problema (E), (C.I.) are o soluție tare unică $u \in W^{1,\infty}(0,T;H)$. Înmulțind scalar ecuația (E) cu $t\frac{du}{dt}(t)$ se obține în baza Lemei 2.2

$$t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 + t\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = t\left(f(t), \frac{du}{dt}(t)\right), \text{ a.p.t. } t \in]0,T[,$$

care prin integrare conduce la

$$\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt + T\varphi(u(T)) = \int_0^T t\left(f(t), \frac{du}{dt}(t)\right)dt + \int_0^T \varphi(u(t))dt.$$

Deoarece $\varphi \geqslant 0$, după un calcul elementar obținem

$$\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt \leqslant \int_0^T t\|f(t)\|^2 dt + 2\int_0^T \varphi(u(t))dt. \tag{2.37}$$

Pe de altă parte, deoarece $f(t) - \frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(u(t))$, a.p.t. $t \in]0,T[$ avem

$$\varphi(u(t)) \leqslant \left(f(t) - \frac{du}{dt}(t),\ u(t) - x_0\right), \text{ a.p.t. } t \in]0,T[. \text{ Deci}$$

$$\int_0^T \varphi(u(t))dt \leqslant \frac{1}{2}\|u_0 - x_0\|^2 + \int_0^T \|f(t)\| \cdot \|u(t) - x_0\|dt. \tag{2.38}$$

Însă, înmulțind scalar (E) cu $u(t) - x_0$ se obține integrînd pe $[0,t]$

$$\|u(t) - x_0\| \leqslant \|u_0 - x_0\| + \int_0^T \|f(t)\|dt,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.39}$$

Din (2.38) și (2.39) deducem

$$\int_0^T \varphi(u(t))dt \leqslant \left(\|u_0 - x_0\| + \int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2. \tag{2.40}$$

Folosind relațiile (2.37) și (2.40) obținem

$$\int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 dt \leqslant \int_0^T t\|f(t)\|^2 dt + 2\left(\|u_0 - x_0\| + \int_0^T \|f(t)\|dt\right)^2. \tag{2.41}$$

Presupunem acum că $u_0 \in \overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}$ și $f \in L^2(0,T;H)$. Fie șirurile $\{u_0^n\} \subset D(\partial\varphi)$ și $\{f_n\} \subset W^{1,2}(0,T;H)$ astfel încît

$$u_0^n \to u_0, \text{ în } H \text{ și} \tag{2.42}$$

$$f_n \to f, \text{ în } L^2(0,T;H). \tag{2.43}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu u_n soluția tare a problemei (E), (C.I.) asociată perechii (u_0^n, f_n). Substituind în (2.9) $u = u_n$ și $v = u_m$ rezultă că există $u \in C([0,T];H)$ astfel încît

$$u_n \to u, \text{ în } C([0,T];H). \tag{2.44}$$

Mai mult, estimarea (2.41) scrisă pentru u_n, u_0^n și f_n arată că u este derivabilă a.p.t.. pe $]0,T[$, $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ și $\sqrt{t}\,\frac{du_n}{dt} \to \sqrt{t}\,\frac{du}{dt}$. slab în $L^2(0,T;H)$. În particular, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic,

$$du_n/dt \to du/dt, \text{ slab în } L^2(\varepsilon,T;H). \tag{2.45}$$

Să notăm cu $\bar{A}$ extensia canonică a lui $A = \partial\varphi$ la $L^2(\varepsilon,T;H)$. În baza relațiilor (2.43), (2.44) și (2.45) se poate trece la limită în ecuația $du_n/dt + \bar{A}(u_n) \ni f_n$, în $L^2(\varepsilon, T;H)$ și se deduce că u verifică a.p.t. pe $]0,T[$ ecuația (E). De asemenea, din (2.42) și (2.44) avem $u(0) = u_0$.

Să amintim că (vezi Propoziția 1.5) funcția $\Phi : L^2(0,T;H) \to]-\infty, +\infty]$ definită prin

$$\Phi(h) = \begin{cases} \int_0^T \varphi(t))dt, & \text{dacă } \varphi \circ h \in L^1(0,T) \\ +\infty, & \text{în rest} \end{cases}$$

este proprie, convexă și semicontinuă inferior. Estimarea (2.40) scrisă pentru u_n, u_0^n și f_n arată că $\Phi(u_n) \leqslant \text{Const}$, $\forall n$ natural. Atunci, semicontinuitatea inferioară a funcției Φ și (2.44) arată că $u \in D(\Phi)$. Deci, avînd în vedere și Lema 2.2, afirmația (2.32) este dovedită.

Presupunem acum că $u_0 \in D(\varphi)$. Folosind ecuația (E) găsim ușor estimarea

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \leqslant \|f(t)\| \cdot \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|, \text{ a.p.t. } t \in]0,T[.$$

Deci

$$\frac{1}{2}\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|^2 + \frac{d}{dt}\varphi(u(t)) \leqslant \frac{1}{2}\|f(t)\|^2, \text{ a.p.t. } t \in]0,T[, \tag{2.46}$$

adică [funcția $t \mapsto \varphi(u(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T \|f(s)\|^2\,ds$ este descrescătoare pe $[0,T]$. Cum $u_0 \in D(\varphi)$, acest fapt implică

$$\varphi(u(t)) \leqslant \varphi(u_0) + \frac{1}{2}\int_0^T \|f(s)\|^2 ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.47}$$

Estimările (2.46) și (2.47) implică evident (2.33). Atunci (2.34) rezultă prin intermediul Lemei 2.2. Astfel demonstrația Teoremei 2.4 este terminată. ■

Observația 2.4. Dacă în Teorema 2.4 se consideră $f \in W^{1,1}(0,T;H)$, atunci u este derivabilă la dreapta în orice punct din $]0,T[$, $u(t) \in D(A)$, $\forall t \in]0,T]$ și $\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t) - A(u(t)))^0$, $\forall t \in]0,T[$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, cum u este soluție tare pentru (E) rezultă că $\forall \varepsilon > 0$ suficient de mic există $t_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$ cu $u(t_\varepsilon) \in D(A)$. Atunci afirmația de mai sus urmează din Teorema 2.1.

Teorema 2.5. (H. Brézis). *Fie* $A = \partial\varphi$ ($\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *proprie, convexă și semicontinuă inferior) și* $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)};\ t \geqslant 0\}$ *semigrupul generat de* $-A$. *Atunci* $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$, $S(t)u_0 \in D(A)$ *pentru toți* $t > 0$ *și*

$$\left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\| = \| A^0(S(t)u_0) \| \leqslant \| A^0(x_0) \| + \frac{1}{t} \| u_0 - x_0 \|, \quad \forall t > 0, \tag{2.48}$$

$\forall x_0 \in D(A)$.

Demonstrație. Fie $[x_0, y_0] \in A$ și definim la fel ca în demonstrația teoremei precedente funcția $\tilde{\varphi}$ prin $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) - (y_0, x - x_0)$. Atunci, evident, $\min_{x \in H} \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0) = 0$. Atunci $u(t) = S(t)u_0$, $t \geqslant 0$ este soluție tare pentru problema Cauchy

$$\frac{du}{dt} + \partial\tilde{\varphi}(u) \ni -y_0, \text{ a.p.t. } t > 0 \tag{2.49}$$

$$u(0) = u_0. \tag{C.I.}$$

Mai exact, conform Observației 2.4, u este derivabilă la dreapta în orice $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ pentru toți $t > 0$ și

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (-y_0 - \partial\tilde{\varphi}(u(t)))^0, \quad \forall t > 0. \tag{2.50}$$

Folosind ecuația (2.50), se obține ușor

$$\int_0^t s \left\| \frac{d^+u}{ds}(s) \right\|^2 ds \leqslant \int_0^t \tilde{\varphi}(u(s))ds - \int_0^t s\left(y_0, \frac{d^+u}{ds}(s)\right)ds =$$

$$= \int_0^t \tilde{\varphi}(u(s))ds - t(y_0, u(t)) + \int_0^t (y_0, u(s))ds \text{ pentru } t \geqslant 0.$$

Pe de altă parte

$$\int_0^t \tilde{\varphi}(u(s))\,ds \leqslant \frac{1}{2}\|u_0 - x_0\|^2 - \frac{1}{2}\|u(t) - x_0\|^2 - \int_0^t (y_0, u(s) - x_0)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\|u_0 - x_0\|^2 - \frac{1}{2}\|u(t) - x_0\|^2 + t(x_0, y_0) - \int_0^t (y_0, u(s))ds$$

pentru $t \geqslant 0$.

Prin urmare

$$\int_0^t s \left\| \frac{d^+u}{ds}(s) \right\|^2 ds \leqslant \frac{1}{2}\|u_0 - x_0\|^2 + t(y_0, x_0 - u(t)) - \frac{1}{2}\|x_0 - u(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|u_0 - x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2), \ t \geqslant 0. \tag{2.51}$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă funcția $t \to \left\| \frac{d^+u}{dt}(t) \right\|$ este descrescătoare pe $]0,+\infty[$. Într-adevăr, acest lucru rezultă din $\frac{d^+}{dt}\|u(t+h)-u(t)\|^2 \leqslant 0$, $\forall t \geqslant 0, h>0$, căci, integrînd pe $[s,t] \subset]0,\infty[$ și împărțind prin $h>0$, obținem $\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} \right\| \leqslant \left\| \frac{u(s+h)-u(s)}{h} \right\|$. Cu această observație rezultă din (2.51) $\left\| \frac{d^+u}{dt}(t) \right\|^2 \leqslant \|y_0\|^2 + \frac{1}{t^2}\|x_0-u_0\|^2$, $\forall t>0$ care implică evident (2.48). Astfel, Teorema 2.5 este complet demonstrată. ■

În cele ce urmează va fi necesară următoarea teoremă de aproximare datorată lui H. Brézis și A. Pazy. Pentru demonstrație indicăm, H. Brézis [1, p. 102].

Teorema 2.6. *Fie* $A^n : D(A^n) \subset H \to H$ *și* $A : D(A) \subset H \to H$ *operatori maximal monotoni,* $f_n, f \in L^1(0,T;H)$, $u_0^n \in \overline{D(A^n)}$ *și* $u_0 \in \overline{D(A)}$. *Fie* u_n *și* u *soluțiile slabe pentru problemele Cauchy*

$$(E_n) \qquad \frac{du_n}{dt} + A^n(u_n) \ni f_n(t), \quad 0 < t < T$$

$$(C.I.)_n \qquad u_n(0) = u_0^n$$

și respectiv (E), (C.I.).

Presupunem că

$$u_0^n \to u \text{ , în } H,$$

$$f_n \to f, \text{ în } L^1(0,T;H) \text{ și}$$

$$(I+\lambda A^n)^{-1}z \to (I+\lambda A)^{-1}z, \ \forall \lambda > 0, \ \forall z \in \overline{D(A)}.$$

Atunci $u_n \to u$, *în* $C([0,T];H)$.

În încheierea acestui paragraf vom enunța niște rezultate legate de anumite ecuații diferențiale de ordinul doi, rezultate care aparțin lui V. Barbu [1, Cap. V, §2]. Demonstrațiile fiind foarte tehnice le vom omite.

Teorema 2.7. *Fie* $B : D(B) \subset H \to H$ *un operator maximal monoton. Fie* $x \in D(B)$, $y \in D(B)$, $f \in L^2(0,T;H)$ $(T>0)$. *Atunci există o funcție unică* $u \in W^{2,2}(0,T;H)$ *care satisface*

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) \in B(u(t)) + f(t), \text{ a.p.t. } t \in]0,T[$$

$$u(0) = x, \ u(T) = y.$$

Teorema 2.8. *Fie* $B : D(B) \subset H \to H$ *maximal monoton cu* $0 \in R(B)$. *Atunci, pentru orice* $x \in \overline{D(B)}$, *există o funcție unică* $u \in W^{2,2}_{loc}(\mathbf{R}_+; H)$ *astfel încît* u *satisface problema*

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) \in B(u(t)), \text{ a.p.t. } t \in \mathbf{R}_+$$

$$u(0) = x, \ \sup_{t \in \mathbf{R}_+} \|u(t)\| < \infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă funcția $t \to \left\| \frac{d^+u}{dt}(t) \right\|$ este descrescătoare pe $]0,+\infty[$. Într-adevăr, acest lucru rezultă din $\frac{d^+}{dt}\|u(t+h)-u(t)\|^2 \leqslant 0$, $\forall t \geqslant 0, h>0$, căci, integrînd pe $[s,t] \subset]0,\infty[$ și împărțind prin $h>0$, obținem $\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} \right\| \leqslant \left\| \frac{u(s+h)-u(s)}{h} \right\|$. Cu această observație rezultă din (2.51) $\left\| \frac{d^+u}{dt}(t) \right\|^2 \leqslant \|y_0\|^2 + \frac{1}{t^2}\|x_0-u_0\|^2$, $\forall t>0$ care implică evident (2.48). Astfel, Teorema 2.5 este complet demonstrată. ■

În cele ce urmează va fi necesară următoarea teoremă de aproximare datorată lui H. Brézis și A. Pazy. Pentru demonstrație indicăm, H. Brézis [1, p. 102].

Teorema 2.6. *Fie* $A^n : D(A^n) \subset H \to H$ *și* $A : D(A) \subset H \to H$ *operatori maximal monotoni,* $f_n, f \in L^1(0,T;H)$, $u_0^n \in \overline{D(A^n)}$ *și* $u_0 \in \overline{D(A)}$. *Fie* u_n *și* u *soluțiile slabe pentru problemele Cauchy*

$$(E_n) \qquad \frac{du_n}{dt} + A^n(u_n) \ni f_n(t), \quad 0 < t < T$$

$$(C.I.)_n \qquad u_n(0) = u_0^n$$

și respectiv (E), (C.I.).

Presupunem că

$$u_0^n \to u, \text{ în } H,$$

$$f_n \to f, \text{ în } L^1(0,T;H) \text{ și}$$

$$(I+\lambda A^n)^{-1}z \to (I+\lambda A)^{-1}z, \quad \forall \lambda > 0, \ \forall z \in \overline{D(A)}.$$

Atunci $u_n \to u$, *în* $C([0,T];H)$.

În încheierea acestui paragraf vom enunța niște rezultate legate de anumite ecuații diferențiale de ordinul doi, rezultate care aparțin lui V. Barbu [1, Cap. V, §2]. Demonstrațiile fiind foarte tehnice le vom omite.

Teorema 2.7. *Fie* $B : D(B) \subset H \to H$ *un operator maximal monoton. Fie* $x \in D(B)$, $y \in D(B)$, $f \in L^2(0,T;H)$ $(T>0)$. *Atunci există o funcție unică* $u \in W^{2,2}(0,T;H)$ *care satisface*

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) \in B(u(t)) + f(t), \text{ a.p.t. } t \in]0,T[$$

$$u(0) = x, \ u(T) = y.$$

Teorema 2.8. *Fie* $B : D(B) \subset H \to H$ *maximal monoton cu* $0 \in R(B)$. *Atunci, pentru orice* $x \in \overline{D(B)}$, *există o funcție unică* $u \in W^{2,2}_{loc}(\mathbf{R}_+; H)$ *astfel încît* u *satisface problema*

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) \in B(u(t)), \text{ a.p.t. } t \in \mathbf{R}_+$$

$$u(0) = x, \ \sup_{t \in \mathbf{R}_+} \|u(t)\| < \infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mai mult $t^{1/2}\frac{du}{dt} \in L^2(\mathbf{R}_+;H)$, $t^{3/2}\frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(\mathbf{R}_+;H)$. *Dacă, în plus,* $x \in D(B)$, *atunci* $d^2u/dt^2 \in L^2(\mathbf{R}_+;H)$.

Observația 2.5. Pentru $t \geqslant 0$ și $x \in \overline{D(B)}$ se definește $S(t)x = u(t)$, unde $u(t)$, $t \geqslant 0$ este dată de Teorema 2.8. Atunci familia $\{S(t) : \overline{D(B)} \to \overline{D(B)};\ t \geqslant 0\}$ este un semigrup de contracții. Într-adevăr, axiomele (a), (b), (c) din Definiția 2.3 sînt verificate în mod banal din cele de mai sus, iar axioma (d) este de asemenea verificată. Într-adevăr, fie $u(t)$ și $v(t)$, $t \geqslant 0$ soluțiile problemei de ordinul doi date de Teorema 2.8 corespunzătoare datelor inițiale x și respectiv y, unde $x, y \in \overline{D(B)}$.

Atunci, folosind monotonia operatorului B, găsim

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}(u(t) - v(t)),\ u(t) - v(t)\right) \geqslant 0, \text{ a.p.t. } t > 0.$$

Prin urmare

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|u(t) - v(t)\|^2 \geqslant \left\|\frac{d}{dt}(u(t) - v(t))\right\|^2 \geqslant 0, \text{ a.p.t. } t > 0.$$

Deci funcția $t \mapsto \|u(t) - v(t)\|^2$ este convexă și cum această funcție este și mărginită pe $\mathbf{R}_+$ rezultă că ea este descrescătoare pe $\mathbf{R}_+$. Așadar, $\|u(t) - v(t)\| \leqslant \|x - y\|$, $t \geqslant 0$ sau, conform notației introduse mai sus, $\|S(t)x - S(t)y\| \leqslant \|x - y\|$, $t \geqslant 0$. Astfel (vezi Observația 2.2), există un operator maximal monoton $A : D(A) \subset H \to H$ cu $\overline{D(A)} = \overline{D(B)}$ astfel încît semigrupul definit anterior coincide cu semigrupul generat de $-A$. Acest operator A se numește *rădăcina pătrată a lui* B în sensul lui V. Barbu și se notează $A = B^{1/2}$.

Dacă $x \in D(B)$, atunci funcția $t \mapsto S(t)x$ este continuu diferențiabilă pe $\mathbf{R}_+$. Deci $x \in D(A^0) = D(A)$, adică avem $D(B) \subset D(A) \subset \overline{D(B)}$.

Cîteva proprietăți ale semigrupului generat de $-A$ sînt conținute în teorema care urmează :

Teorema 2.9. *Fie* $A = B^{1/2}$ ($B : D(B) \subset H \to H$ *maximal monoton cu* $0 \in R(B)$) *și fie* $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)};\ t \geqslant 0\}$ *semigrupul generat de* $-A$. *Atunci*

(i) $\forall x \in \overline{D(A)}$, *funcția* $t \mapsto S(t)x$ *este continuu diferențiabilă pe* $]0, +\infty[$ *și* $\frac{d}{dt}S(t)x + A^0(S(t)x) = 0$, $\forall t > 0$

(ii) $\forall x \in \overline{D(A)}$ *și* $y \in A^{-1}(0)$, $\left\|\frac{d}{dt}S(t)x\right\| \leqslant (1/t)\|x - y\|$, $\forall t > 0$. *În plus,* $\frac{d^2}{dt^2}S(t)x$ *există* a.p.t. $t > 0$ *și* $\int_0^\infty t^3\left\|\frac{d^2}{dt^2}S(t)x\right\|^2 dt \leqslant \frac{3}{2}\|x - y\|^2$.

(iii) *Dacă* $x \in D(A)$, *atunci funcția* $t \mapsto S(t)x$ *este continuu diferențiabilă pe* $[0, +\infty[$ *și* $t^{1/2}\frac{d^2}{dt^2}S(t)x \in L^2(\mathbf{R}_+;H)$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

STABILITATEA SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR DE EVOLUȚIE ÎN SPAȚII HILBERT

În acest capitol se analizează în detaliu problema comportării pentru $t \to \infty$ a soluțiilor ecuațiilor de evoluție abstracte în spații Hilbert asociate la operatori monotoni. Sînt expuse principalele rezultate cunoscute pînă în prezent în literatura matematică referitoare la următoarele probleme: mărginirea soluțiilor pe semiaxă (sau stabilitatea în sens Lagrange), comportarea soluțiilor precum și comportarea mediilor soluțiilor pentru $t \to \infty$ în topologia slabă sau în topologia tare; de asemenea, în paragraful trei ne ocupăm de aproximarea prin scheme cu diferențe finite a soluțiilor staționare, rezultatele prezentate aici fiind versiuni discrete ale teoremelor de comportare asimptotică din cazul evolutiv.

Toate considerațiile vor fi făcute într-un spațiu Hilbert real H, cu produsul scalar notat cu $(\cdot,\cdot)$ și norma hilbertiană $\|\cdot\|$. Este adevărat că în prezent în literatură se înregistrează eforturi remarcabile pentru extinderea rezultatelor de acest fel de la cadrul hilbertian la cazul spațiilor Banach generale. Pentru a putea face o expunere clară și unitară ne vom limita totuși la cadrul hilbertian care de altfel este suficient de general pentru aplicațiile prezentate în capitolul următor.

§ 1. MĂRGINIREA SOLUȚIILOR PE SEMIAXĂ. CONVERGENȚA ÎN TOPOLOGIA SLABĂ A SOLUȚIILOR SAU A MEDIILOR LOR, PENTRU $t \to \infty$

1.1. Soluții mărginite pe semiaxă. Convergența slabă a mediilor

Teorema 1.1 *Presupunem că* $A : D(A) \subset H \to H$ *este un operator maximal monoton. Se notează cu* $\{S(t); t \geq 0\}$ *semigrupul de contracții generat de* $-A$, *și se definește* $\sigma(t)x = (1/t)\int_0^t S(s)x\,ds$, $x \in \overline{D(A)}$, $t > 0$. *De asemenea, se notează, ca de obicei,* $J_t = (I + tA)^{-1}$, $t > 0$ *(rezolventa operatorului* A*). Atunci, următoarele condiții sînt echivalente:*

(i) $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\limsup_{t \to \infty} \|S(t)x\| < +\infty$.

(ii) *mulțimea* $F = A^{-1}(0)$ *este nevidă.*

(iii) $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\limsup_{t \to \infty} \|\sigma(t)x\| < +\infty$.

(iv) $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\liminf_{s \to \infty} \|\sigma(t)x\| < +\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

(v) $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\sigma(t)x$ *converge în topologia slabă, pentru* $t \to \infty$.

(vi) $\forall x \in H$, $\limsup_{t \to \infty} \|J_t x\| < +\infty$.

(vii) $\forall x \in H$, $\liminf_{t \to \infty} \|J_t x\| < +\infty$.

(viii) $\forall x \in H$, $J_t x$ *converge în topologia tare, pentru* $t \to \infty$.

Mai mult, se poate preciza că limita slabă a mediei $\sigma(t)x$, *atunci cînd există, este conținută în* F, *iar limita tare pentru* $J_t x$, *atunci cînd există, coincide cu* $\mathrm{Proi}_F x$, *unde* „Proi_F" *înseamnă proiecția pe* F.

Notă bibliografică. Teorema 1.1 însumează rezultatele mai multor autori. Astfel, echivalența (i) $\Leftrightarrow$ (ii) a fost demonstrată inițial de M. G. Crandall și A. Pazy [1] iar apoi redemonstrată mai simplu de A. Pazy [1] în forma în care apare aici. Echivalența (ii) $\Leftrightarrow$ (v) a fost dovedită de J. B. Baillon și H. Brézis [1]. Vezi, de asemenea, J. B. Baillon [1]. Echivalența (ii) $\Leftrightarrow$ (viii) este demonstrată în lucrarea [1] a autorului. Celelalte concluzii ale Teoremei 1.1 sînt simple observații.

Observația 1.1. Dacă $A : D(A) \subset H \to H$ este maximal monoton, atunci evident mulțimea $F = A^{-1}(0)$ este convexă și închisă, eventual vidă. Prin urmare, dacă F este nevidă, proiecția pe F a oricărui vector $x \in H$ există și este unică. Este ușor de verificat că mulțimea $F = A^{-1}(0)$ coincide cu mulțimea punctelor de echilibru ale semigrupului generat de $-A$, adică $F = \{p \in \overline{D(A)}\,;\, S(t)p = p,\ \forall t \geqslant 0\}$.

De asemenea, se verifică elementar că $F = \{p \in H\,;\, J_t p = p,\ \forall t \geqslant 0\}$.

Demonstrația Teoremei 1.1. Să observăm mai întîi că implicațiile (i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (iv), (v) $\Rightarrow$ (iii), (vi) $\Rightarrow$ (vii) și (viii) $\Rightarrow$ (vi) sînt banale. Mai departe, scriem că

$$(1.1)\quad (1/2)\|S(t)x - v\|^2 \leqslant (1/2)\|x - v\|^2 + \int_0^t \langle w, v - S(s)x\rangle\, ds,\ \forall x \in \overline{D(A)},$$
$$\forall t \geqslant 0,\ \forall [v, w] \in A.$$

Împărțind (1.1) prin $t > 0$ rezultă

$$(1.2)\quad (1/2t)\|S(t)x - v\|^2 \leqslant (1/2t)\|x - v\|^2 + \langle w, v - \sigma(t)x\rangle,\ \forall x \in \overline{D(A)},$$
$$\forall t > 0,\ (\forall [v, w] \in A.$$

Dacă admitem că (ii) este îndeplinită, atunci se poate lua în (1.1) $w = 0$ și $v \in F$ și atunci rezultă că $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\{S(t)x\,;\, t \geqslant 0\}$ este o mulțime mărginită. Așadar, am dovedit implicația (ii) $\Rightarrow$ (i). Să demonstrăm acum că (iv) $\Rightarrow$ (ii). Din (iv) rezultă că $\forall x \in \overline{D(A)}$ există un șir $t_n \to \infty$ astfel încît $\sigma(t_n)x$ converge slab în H la un element p. Dacă luăm $t = t_n$ în (1.2) și trecem la limită în această inegalitate (după ce se renunță la primul membru, înlocuindu-se cu 0) se obține

$$(1.3)\qquad 0 \leqslant \langle w, v - p\rangle, \qquad \forall [v, w] \in A.$$

Datorită maximalității operatorului A relația (1.3) implică $[p, 0] \in A$ sau echivalent $p \in F$. Astfel (iv) $\Rightarrow$ (ii). Implicația (ii) $\Rightarrow$ (v) este o consecință directă a Teoremei 1.2 de mai jos, în care luăm $f \equiv 0$. Din cele demonstrate mai sus se desprinde informația că limita slabă a mediei, atunci cînd există, este conținută în F.

Scanned with OKEN Scanner

Recapitulînd, observăm că pînă în acest moment am dovedit deja echivalența primelor cinci condiții. Dacă admitem că F este nevidă atunci se poate scrie

$$\|J_t x - p\| = \|J_t x - J_t p\| \leqslant \|x - p\|, \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall p \in F.$$

Deci evident (ii) $\Rightarrow$ (vi). Mai departe, să presupunem că (vii) este, îndeplinită. Atunci $\forall x \in H$, există un șir $t_n \to \infty$ astfel încît $J_{t_n} x$ converge slab la un element $p \in H$. Atunci evident

$$A_{t_n}(x) = (1/t_{t_n})(x - J_{t_n}) \to 0, \text{ cînd } n \to \infty. \tag{1.4}$$

Cum $A_{t_n}(x) \in A(J_{t_n} x)$ se poate scrie că

$$(w - A_{t_n}(x), \ v - J_{t_n} x) \geqslant 0, \ \forall [v, w] \in A, \ \forall n. \tag{1.5}$$

Trecînd la limită în (1.5) se obține iar (1.3), care implică $p \in F$. Prin urmare (vii) $\Rightarrow$ (ii). Este demn de reținut și faptul că orice limită slabă pentru $J_t x$, cînd $t \to \infty$, aparține mulțimii F. Este clar că pentru a termina demonstrația teoremei ar fi suficient să arătăm că (ii) $\Rightarrow$ (viii). Presupunem așadar că F este nevidă. Deoarece aproximanta Yosida A_t este un operator monoton și $A_t(y) = 0$, $\forall y \in F$, $\forall t > 0$ avem $(x - J_t x, \ y - J_t x) \leqslant \leqslant 0$, $\forall x \in H$, $\forall y \in F$. Aceasta implică

$$\|x - J_t x\| \leqslant \|x - y\|, \quad \forall x \in H, \ \forall y \in F. \tag{1.6}$$

Prin urmare

$$\|x - J_t x\| \leqslant \|x - \mathrm{Proi}_F x\|, \ \forall x \in H. \tag{1.7}$$

Fixînd un $x \in H$, inegalitatea (1.6) arată din nou că funcția $t \mapsto J_t x$ este mărginită pentru $t \to \infty$. Fie un șir $t_n \to \infty$ pentru care $J_{t_n} x$ converge slab, să zicem la u_x. Cum am remarcat mai sus, $u_x \in F$. Dar atunci (1.6) cu $y = u_x$ arată că de fapt $J_{t_n} x$ converge tare la u_x (vezi Propoziția 1.1 din Cap. 0) Mai departe (1.7) ne spune că $u_x = \mathrm{Proi}_F x$. Deoarece pe orice subșir $J_t x$ converge la unicul element $\mathrm{Proi}_F x$ rezultă că (viii) este într-adevăr îndeplinită. Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Observația 1.2. Din demonstrația de mai sus este limpede că dacă în fiecare din condițiile (i), (iii) $\sim$ (viii) se înlocuiește „$\forall x$" prin „$\exists x$" se obțin condiții echivalente cu cele originale.

Să presupunem acum că f este o funcție din $L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$, unde $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ și fie $z(t)$, $t \geqslant 0$ o soluție slabă oarecare a ecuației

$$du/dt + A(u) \ni f(t), \ t > 0. \tag{E}$$

Atunci deoarece $\|z(t) - S(t)z(0)\| \leqslant \int_0^\infty \|f(s)\| \, ds$, $\forall t \geqslant 0$ rezultă că următoarele condiții sînt echivalente cu fiecare din condițiile (i) $\sim$ (viii).

(i)' $\limsup_{t \to \infty} \|z(t)\| < +\infty$,

(iii)' $\limsup_{t \to \infty} \|\sigma_z(t)\| < +\infty$, unde

$$\sigma_z(t) = (1/t)\int_0^t z(s) ds, \ t > 0, \tag{1.8}$$

(iv)' $\liminf_{t \to \infty} \|\sigma_z(t)\| < +\infty$.

Teorema 1.2 *Presupunem că* $A : D(A) \subset H \to H$ *este un operator maximal monoton, mulțimea* $F = A^{-1}(0)$ *este nevidă și* $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$. *Fie* $z(t)$, $t \geqslant 0$ *o soluție slabă oarecare a ecuației* (E). *Atunci, există un element* $p \in F$, *corespunzător soluției* $z(t)$, *astfel încît media* $\sigma_z(t)$, *definită la* (1.8), *converge în topologia slabă la* p *și, în plus, există*

$$\lim_{t\to\infty} \| \mathrm{Proi}_F z(t) - p \| = 0. \tag{1.9}$$

Notă bibliografică. Teorema 1.2 este o extensie la cazul neomogen a implicației (ii) ⇒ (v) din Teorema 1.1, extensie datorată autorului [2]. Demonstrația urmărește ideea folosită de J. B. Baillon și H. Brézis [1] în cazul $f \equiv 0$.

Demonstrație. Deoarece F este presupusă nevidă, conform celor de mai sus, $z(t)$ și $\sigma_z(t)$ sînt mărginite pentru $t \to \infty$. Deoarece $z(t)$ este soluție slabă a ecuației (E)

$$(1/2)\|z(t)-y\|^2 \leqslant (1/2)\|z(s)-y\|^2 + \int_s^t \|f(r)\| \cdot \|z(r)-y\| \, dr, \quad \forall y \in F, \; t \geqslant s \geqslant 0,$$

de unde se deduce cu ajutorul Lemei 2.1 din Cap. I că

$$\|z(t)-y\| \leqslant \|z(s)-y\| + \int_s^t \|f(r)\| dr, \quad \forall y \in F, \; 0 \leqslant s \leqslant t < \infty.$$

Deci, pentru orice $y \in F$, funcția $t \mapsto \|z(t)-y\| - \int_0^t \|f(r)\| dr$ este descrescătoare pe $\mathbf{R}_+$. Ținînd cont că această funcție este în același timp mărginită pe $\mathbf{R}_+$, tragem concluzia că ea are limită finită cînd $t \to \infty$, pentru orice $y \in F$. Deoarece $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$ este evident atunci că există

$$\lim_{t\to\infty} \|z(t)-y\| = \rho(y), \text{ pentru orice } y \in F. \tag{1.10}$$

Să facem notația $v(t) = \mathrm{Proi}_F z(t)$.

Vom arăta că funcția

$$t \mapsto \|z(t)-v(t)\| - \int_0^t \|f(r)\| dr \tag{1.11}$$

este descrescătoare pe $\mathbf{R}_+$ și prin urmare $\|z(t)-v(t)\|$ are limită finită, cînd $t \to \infty$. Pentru $s \geqslant 0$ fixat să notăm $w_s(t) = z(t+s)$, $t \geqslant 0$. Evident w_s satisface (în sens slab) ecuația (E) cu $f(t+s)$ în loc de $f(t)$. Conform raționamentului de mai sus funcția $t \mapsto \|w_s(t) - v(s)\| - \int_0^t \|f(s+r)\| dr$ este descrescătoare, întrucît $v(s) \in F$. Prin urmare

$$\|z(t+s)-v(s)\| - \int_s^{t+s} \|f(r)\| dr \leqslant \|z(s)-v(s)\|, \quad \forall t, s \geqslant 0.$$

În continuare se obține că

$$\begin{aligned} \|z(t+s)-v(t+s)\| - \int_0^{t+s} \|f(r)\| dr \leqslant \\ \leqslant \|z(t+s)-v(s)\| - \int_s^{t+s} \|f(r)\| dr - \int_0^s \|f(r)\| dr \leqslant \\ \leqslant \|z(s)-v(s)\| - \int_0^s \|f(r)\| dr, \quad \forall t, s \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci funcția (1.11) este într-adevăr descrescătoare pe $\mathbf{R}_+$. Identitatea paralelogramului aplicată vectorilor $v(t+s)-z(t+s)$ și $v(s)-z(t+s)$ conduce la relația

$$\|v(t+s)-v(s)\|^2 = 2\|z(t+s)-v(t+s)\|^2 + 2\|z(t+s)-v(s)\|^2 - 4\|z(t+s)-(1/2)(v(t+s)+v(s))\|^2, \quad \forall t,\ s \geqslant 0.$$

Ținînd cont de faptul că F este convexă și de definiția funcției $v(t)$ se obține de aici că

$$\|v(t+s)-v(s)\|^2 \leqslant 2(\|z(t+s)-v(s)\|^2 - \|z(t+s)-v(t+s)\|^2), \quad \forall t, s \geqslant 0.$$

Această inegalitate împreună cu (1.12) implică

$$\|v(t+s)-v(s)\|^2 \leqslant 2\left(\left(\|z(s)-v(s)\| + \int_s^{t+s} \|f(r)\|\,dr\right)^2 - \|z(t+s)-v(t+s)\|^2\right), \quad \forall\ t,s \geqslant 0.$$

Conform celor de mai sus, aceasta implică desigur convergența tare pentru $v(t)$, cînd $t \to \infty$, la un element $p \in F$. Mai departe folosind definiția lui $v(t)$ avem $(z(t)-v(t),\ y-v(t)) \leqslant 0$, $\forall y \in F$, $t \geqslant 0$. Prin urmare

$$(1.13) \qquad (\sigma_z(t) - (1/t)\int_0^t v(s)ds,\ y-p) \leqslant (1/t)\int_0^t (z(s)-v(s),\ v(s)-p)ds \leqslant$$

$$\leqslant (M/t)\int_0^t \|v(s)-p\|\,ds, \quad \forall y \in F,\ t>0,$$

unde $M = \sup_{t\geqslant 0}\|z(t)-v(t)\|$. Deoarece $v(t) \to p$, cînd $t \to \infty$, rezultă

$$(1.14) \qquad (1/t)\int_0^t \|v(s)-p\|ds \to 0, \text{ cînd } t \to \infty.$$

Din demonstrația Teoremei 1.1 este evident că mulțimea $\{q \in H$; există $t_n \to \infty$ astfel ca $\sigma(t_n)x \to q$ slab în $H\}$ este inclusă în F, $\forall x \in \overline{D(A)}$. Este de așteptat ca și în cazul lui $\sigma_z(t)$ să se întîmple același lucru. Răspunsul este într-adevăr afirmativ, adică are loc incluziunea

$$(1.15) \qquad \{q \in H;\ \text{există } t_n \to \infty \text{ astfel încît } \sigma_z(t_n) \to q \text{ slab}\} \subset A^{-1}(0).$$

Pentru a arăta acest fapt, să observăm mai întîi că deoarece $z(t)$, $t \geqslant 0$ este soluție slabă pentru (E)

$$(1.16) \qquad (1/2t)\|z(t)-v\|^2 - (1/2t)\|z(0)-v\|^2 + (1/t)\int_0^t (f(s),$$

$$v - z(s))ds \leqslant (w, v-\sigma_z(t)), \quad \forall t>0,\ \forall\ [v,w] \in A.$$

Fie $t_n \to \infty$ și $q \in H$ astfel încît $\sigma_z(t_n)$ converge slab la q. În (1.16) se poate renunța la primul termen din membrul întîi. Luînd apoi $t = t_n$ în această inegalitate, obținem dacă se trece la limită pentru $n \to \infty$ și se ține seama de ipoteze : $0 \leqslant (w, v-q)$, $\forall\ [v,w] \in A$. Prin urmare $q \in A^{-1}(0)$. Deci (1.15) este dovedită.

Fie acum șirul $t_n \to \infty$ și $q \in F$, astfel încît $\sigma_z(t_n)$ converge slab la q. Atunci (1.13) și (1.14) (unde $t = t_n$) implică, trecînd la limită cu $n \to \infty$, $(q-p,\ y-p) \leqslant 0$, $\forall y \in F$. Luînd $y = q$ obținem $q = p$, adică $\sigma_z(t)$ converge slab la p. Astfel, demonstrația Teoremei 1.2 este terminată. ■

Scanned with OKEN Scanner

1.2. O teoremă de comparație

Teorema 1.3 *Presupunem că* $A : D(A) \subset H \to H$ *este un operator maximal monoton și* $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$. *Fie* $\{S(t) ; t \geqslant 0\}$ *semigrupul generat de* $-A$. *Dacă admitem că*

(1.17) $\forall x \in \overline{D(A)}$, *există* $\lim_{t\to\infty} S(t)x$ *în topologia tare (slabă)*

atunci, oricare ar fi $z(t)$, $t \geqslant 0$ *o soluție a ecuației* (E),

(1.18) *există* $\lim_{t\to\infty} z(t)$ *în topologia tare (respectiv slabă).*

Notă bibliografică. Teorema 1.3 a fost demonstrată de autor în lucrarea [3].

Demonstrație. Să definim funcțiile $f_n : \mathbf{R}_+ \to H$ în felul următor

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), \text{ a.p.t. } t \in]0, nT[\\ 0, \text{ pentru orice } t \geqslant nT, \end{cases}$$

unde n este natural și $T > 0$ este un număr real fixat. Pentru fiecare n, să notăm cu $z_n(t)$, $t \geqslant 0$ soluția slabă a problemei Cauchy

$$(E_n) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_n}{dt}(t) + A(z_n(t)) \ni f_n(t), \ t > 0 \\ z_n(0) = z(0). \end{cases}$$

Evident, $z_n(t) = S(t)z_n(nT)$, pentru $t \geqslant nT$. Prin ipoteza (1.17) pentru fiecare n există $p_n \in H$ astfel încît

(1.19) $$\lim_{t\to\infty} z_n(t) = p_n, \text{ tare (respectiv slab) în } H.$$

Deoarece, evident, $\|z_n(t) - z_m(t)\| \leqslant \int_{mT}^{nT} \|f(s)\| \, ds$, $\forall t \geqslant 0$, $n > m$ rezultă din (1.19) că $\|p_n - p_m\| \leqslant \int_{mT}^{nT} \|f(s)\| \, ds$, $n > m$, deci există $p \in H$, astfel încît

(1.20) $$\lim_{n\to\infty} p_n = p, \text{ tare în } H.$$

Pe de altă parte, cum z_n și z sînt soluții slabe ale ecuațiilor (E_n) și respectiv (E), se poate scrie că

(1.21) $$\|z(t) - z_n(t)\| \leqslant \int_{nT}^{t} \|f(s)\| \, ds, \ \forall t \geqslant nT.$$

Folosind acum descompunerea următoare $z(t) - p = [z(t) - z_n(t)] + [z_n(t) - p_n] + [p_n - p]$ și relațiile (1.19), (1.20) și (1.21) se poate conchide că $\lim_{t\to\infty} z(t) = p$, în topologia tare (respectiv slabă) a lui H. ■

Observația 1.3. Teorema 1.3 este foarte utilă întrucît în ipoteza $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$ găsirea condițiilor care să asigure convergența tare (slabă) la infinit a soluțiilor ecuației (E) se reduce la găsirea condițiilor pentru convergența tare (respectiv slabă) a traiectoriilor semigrupului generat de $-A$.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, se poate preciza că limita (1.18) atunci cînd există este în mulțimea $F = A^{-1}(0)$. Într-adevăr, dacă notăm cu p această limită tare (slabă), atunci evident $\sigma_z(t)$, definită prin (1.8), converge la p, cînd $t \to \infty$ în topologia tare (slabă) a lui H. Dar conform Teoremei 1.2 $p = \lim_{t\to\infty} \mathrm{Proi}_F z(t)$, tare în H. Prin urmare $p \in F$.

1.3. Condiții necesare și suficiente pentru convergența slabă

Pentru considerațiile următoare să introducem următoarea notație folosită în dinamica topologică clasică. Anume, dat semigrupul de contracții $\{S(t) : C \to C;\ t \geqslant 0\}$, se notează

(1.22) $$\omega(x) = \{p \in C;\ \text{există } t_n \to \infty \text{ astfel încît } S(t_n)x \to p, \text{ tare în } H\},\ x \in C.$$

În mod analog se notează

(1.23) $\omega_w(x) = \{p \in C;$ există $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)x$ converge slab la $p\}$, $x \in C$.

Teorema 1.4. *Fie $\{S(t) : C \to C;\ t \geqslant 0\}$ un semigrup de contracții avînd mulțimea F a punctelor sale de echilibru nevidă. Fie $x \in C$. Atunci următoarele trei condiții sînt echivalente:*

(a) există $\lim_{t\to\infty} S(t)x$, în topologia slabă,

(b) există $\lim_{t\to\infty} [S(t+h)x - S(t)x] = 0$, în topologia slabă, $\forall\, h \geqslant 0$,

(c) $\omega_w(x) \subset F$.

Notă bibliografică. Teorema 1.4 conține rezultate ale lui A. Pazy [1] cu completările aduse de R. Schöneberg [1].

Demonstrație. Implicația (a) $\Rightarrow$ (b) rezultă în mod banal. Pentru a arăta că (b) $\Rightarrow$ (c) fie $p \in F$ și $y \in \omega_w(x)$, adică există șirul $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)x$ converge slab la y. Atunci, pentru orice n natural și orice $h \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \|S(t_n)x - y\|^2 - \|S(t_n + h)x - S(h)y\|^2 = \|S(t_n)x - p\|^2 +$$
$$+ 2(S(t_n)x - p,\ p - y) + \|p - y\|^2 - \|S(t_n + h)x - p\|^2 - 2(S_n(t_n +$$
$$+ h)x - p,\ p - S(h)y) - \|p - S(h)y\|^2 = \|S(t_n)x - p\|^2 - \|S(t_n +$$
$$+ h)x - p\|^2 + 2(S(t_n)x - p,\ S(h)y - y) + 2(S(t_n)x - S(t_n +$$
$$+ h)x,\ p - S(h)y) - \|p - S(h)y\|^2 + \|p - y\|^2.$$

Se trece la limită cu $n \to \infty$ în această inegalitate ținînd cont de (b) și de faptul că funcția

(1.24) $$t \mapsto \|S(t)x - p\|,\ \text{este descrescătoare},\ \forall p \in F.$$

Se obține astfel $0 \leqslant 2(y - p,\ S(h)y - y) - \|p - S(h)y\|^2 + \|p - y\|^2 = -\|y - S(h)y\|^2,\ \forall\, h \geqslant 0$, adică $y \in F$. Prin urmare (b) $\Rightarrow$ (c). Mai departe, din (1.24) deducem că $\forall p \in F$, există $\lim_{t\to\infty} \|S(t)x - p\| = \rho(p)$. Admițînd în plus că $\omega_w(x) \subset F$ se obține (a) prin aplicarea directă a Lemei lui Opial (vezi Cap. 0) care evident rămîne adevărată și pentru șiruri generalizate. Astfel (c) $\Rightarrow$ (a), adică teorema este complet demonstrată. ■

Scanned with OKEN Scanner

Observația 1.4. Așa cum arată R. Schöneberg [1], Teorema 1.4 rămîne adevărată pentru semigrupuri de contracții nu necesar continue. Mai exact, fie $C \subset H$ slab închisă (nu necesar convexă) și I o mulțime nemărginită din $[0, +\infty[$ astfel încît : $t + h \in I$, pentru orice $t,\ h \in I$ și $t - h \in I$, pentru orice $t,\ h \in I$, cu $t > h$ (de exemplu, $I = [0, \infty[$ sau $I = \mathbf{N}$). Fie atunci $S : I \times C \to C$ o aplicație satisfăcînd condițiile :

$$(1^\circ) \qquad S(t + h)x = S(t)\,S(h)x, \qquad \forall\, h \in I \text{ și } x \in C$$

și

$$(2^\circ) \qquad \| S(t)x - S(t)y \| \leqslant \| x - y \|, \qquad \forall t \in I \text{ și } x, y \in C$$

(adică S este un semigrup neexpansiv, nu necesar continuu). Este ușor de văzut că Teorema 1.4 rămîne în totalitate adevărată pentru acest caz.

În particular, dacă $I = \mathbf{N}$ (mulțimea numerelor naturale) și $S(n)x = T^n(x)$, unde $T : C \to C$ este o aplicație neexpansivă iar C este convexă, atunci Teorema 1.4 aparține lui A. Pazy [2] și R. E. Bruck [1].

1.4. Condiții suficiente pentru convergența slabă

Propoziția 1.1 *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton și fie $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Presupunem că $F = A^{-1}(0)$ este nevidă și fie $x \in D(A)$. Atunci*

$$\forall y_0 \in F,\ \omega_w(x) = \{p \in H;\ \exists\, s_j \to \infty \text{ astfel încît}$$
$$(A^0(S(s_j)x),\ S(s_j)x - y_0) \to 0 \text{ și } S(s_j)x \to p\}.$$

Demonstrație. Cum incluziunea „$\supset$” rezultă banal, rămîne s-o demonstrăm pe cea contrară. Fie așadar $p \in \omega_w(x)$, adică există $t_k \to \infty$ astfel încît $S(t_k)x \to p$. Evident

$$(1.25) \qquad (1/2)\frac{d^+}{dt}\| S(t)x - y_0 \|^2 + (A^0(S(t)\,x),\ S(t)x - y_0) = 0,\ \forall t \geqslant 0.$$

Prin urmare, funcția $t \mapsto \| S(t)x - y_0 \|$ este descrescătoare și, în plus, tot din (1.25) se vede că funcția $h(t) = (A^0(S(t)x), S(t)\,x - y_0)$ este în $L^1(\mathbf{R}_+)$. Pentru $\varepsilon > 0$ fie $P_\varepsilon = \{t \in \mathbf{R}_+;\ h(t) \geqslant \varepsilon\}$. Deoarece $h(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ măsura mulțimii P_ε ete finită. Prin urmare, există $s = s(\varepsilon)$ cît de mare dorim astfel încît $h(s) < \varepsilon$ și $| t_k - s | < \varepsilon$ pentru un $t_k = t_k(s)$ (un termen al șirului $\{t_k\}$ care definește p) suficient de mare. Pe de altă parte, $\| S(t_k)x - S(s)x \| \leqslant \| A^0(x) \| \cdot | t_k - s | \leqslant \| A^0(x) \| \varepsilon$. Luînd $\varepsilon = 1/j$ rezultă atunci că există șirul $s_j \to \infty$ și subșirul $\{t_{k_j}\} \subset \{t_k\}$ astfel încît $h(s_j) < 1/j$, $| t_{k_j} - s_j | < 1/j$ și $\| S(t_{k_j})x - S(s_j)x \| \leqslant \| A^0(x) \| (1/j)$. Astfel, demonstrația propoziției este încheiată. ■

Observația 1.5. În condițiile Propoziției 1.1 fie $y_0 \in F$. Să definim mulțimea :

$$(1.26) \qquad \Omega(y_0) = \{p \in H;\ \exists \{[p_n,\ w_n]\} \subset A \text{ astfel încît } p_n \to p,$$
$$\{\| w_n \|\} \text{ este mărginit și } (w_n,\ p_n - y_0) \to 0\}.$$

Din Propoziția 1.1 se deduce imediat că

$$(1.27) \qquad \omega_w(x) \subset \Omega(y_0),\ \forall x \in D(A) \text{ și } \forall y_0 \in F.$$

Scanned with OKEN Scanner

În [2] R. E. Bruck a introdus noțiunea de operator demipozitiv, adică :

Definiția 1.1. Un operator monoton $A : D(A) \subset H \to H$ se numește *demipozitiv* dacă $F = A^{-1}(0) \neq \emptyset$ și există $y_0 \in F$ astfel încît

$$\Omega(y_0) \subset F. \tag{1.28}$$

Mai exact, vom spune că A este demipozitiv în raport cu y_0.

Teorema 1.5. *Presupunem că $A : D(A) \subset H \to H$ este maximal monoton și demipozitiv. Fie $\{S(t) ; t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Atunci*

$$\forall x \in \overline{D(A)}, \text{ există } \lim_{t\to\infty} S(t)x, \text{ în topologia slabă.} \tag{1.29}$$

Demonstrație. Din (1.27) și (1.28) urmează că $\omega_w(x) \subset F = A^{-1}(0)$, pentru orice $x \in D(A)$. Atunci conform Teoremei 1.4, (1.29) este îndeplinită pentru orice $x \in D(A)$. Evident, (1.29) se poate extinde la $\overline{D(A)}$. Într-adevăr, fie $x \in \overline{D(A)}$ și $x_n \to x$ cu $x_n \in D(A)$. Din cele de mai sus, există $p_n \in F$ astfel încît $S(t)x_n \to p_n$, cînd $t \to \infty$. Deoarece $\|p_n - p_m\| \leqslant \leqslant \liminf_{t\to\infty} \|S(t)x_n - S(t)x_m\| \leqslant \|x_n - x_m\|$ rezultă că există $p \in F$, așa încît $p_n \to p$. Pe de altă parte

$$S(t)x - p = [S(t)x - S(t)x_n] + [S(t)x_n - p_n] + [p_n - p].$$

Prin urmare $S(t)x \to p$, cînd $t \to \infty$. ∎

Cîteva clase remarcabile de operatori maximal monotoni pentru care traiectoriile semigrupurilor generate converg în topologia slabă, pentru $t \to \infty$, sînt prezentate în următoarea teoremă :

Teorema 1.6. *Presupunem că $A : D(A) \subset H \to H$ este maximal monoton și fie $\{S(t) ; t \geqslant 0\}$ semigrupul de contracții generat de $-A$. Atunci fiecare din următoarele condiții este suficientă pentru a asigura* (1.29), *adică convergența slabă a tuturor traiectoriilor semigrupului $\{S(t) ; t \geqslant 0\}$, pentru $t \to \infty$.*

(I_1) *$A^{-1}(0) \neq \emptyset$ și există o constantă $\sigma > 0$ astfel încît*

$$(A(u) - A(w),\ w - v) \leqslant \sigma\ (A(u) - A(v),\ u - v), \text{ pentru toți } u, v, w \in D(A). \tag{1.30}$$

(I_2) *$A = a(I - T)$ cu $a > 0$, unde $T : H \to H$ este neexpansiv și are un punct fix.*

(I_3) *$A = B^{1/2}$ (rădăcina pătrată a lui B în sensul lui V. Barbu,* vezi Observația 2.6, Cap. I) *unde $B : H \to H$ este maximal monoton cu $B^{-1}(0) \neq \emptyset$.*

(I_4) *A* este impar și

$$(v, x) = 0, \text{ cu } v \in A(x) \Rightarrow x \in A^{-1}(0). \tag{1.31}$$

Observația 1.6. Condiția (1.30) a fost scrisă în forma de mai sus pentru simplitate. De fapt, trebuie înțeles că (1.30) are loc pentru orice secțiune a lui A. Evident, (1.30) are loc cu $\sigma = 1$ dacă și numai dacă A este trimonoton. În particular (I_1) este îndeplinită dacă A este subdiferențiala unei funcții $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ care este proprie, convexă și inferior semicontinuă (pe scurt $A = \partial\varphi$) și φ are cel puțin un punct de minim. În acest caz mulțimea $A^{-1}(0)$ coincide cu mulțimea punctelor de minim ale funcției φ.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția (I_2) este îndeplinită în particular de aproximanta Yosida B_λ, $\lambda > 0$ a unui operator B maximal monoton cu $B^{-1}(0) \neq \emptyset$.

Demonstrația Teoremei 1.6. *Cazul* (I_1). Fie $x \in D(A)$ și $y_0 \in A^{-1}(0)$. Atunci din (1.30) avem

$$(1.32) \qquad (-A(w), w - S(t)x) \leqslant \sigma(A^0(S(t)x), S(t)x - y_0), \ \forall w \in D(A), \ \forall t \geqslant 0.$$

Fie $p \in \omega_w(x)$. Atunci, conform Propoziției 1.1, există $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)x \rightharpoonup p$ și $(A^0(S(t_n)x), S(t_n)x - y_0) \to 0$. Luînd în (1.32) $t = t_n$ și trecînd la limită se obține $(A(w), w - p) \geqslant 0$, $\forall w \in D(A)$ deci $p \in A^{-1}(0)$. Prin urmare, $\omega_w(x) \subset A^{-1}(0)$, $\forall x \in D(A)$. Din Teorema 1.4 urmează că (1.29) are loc pentru orice $x \in D(A)$ și deci pentru orice $x \in \overline{D(A)}$, conform raționamentului folosit în demonstrația Teoremei 1.5. De fapt, se poate arăta mai mult, că în cazul (I_1) A este demipozitiv.

Cazul (I_2). Deoarece T este neexpansiv, pentru orice $x, y \in H$,

$$0 \leqslant \|x - y\|^2 - \|T(x) - T(y)\|^2 = (x - y + T(x) - T(y), (x - y) -$$
$$- (T(x) - T(y)) = (1/a^2)\,(2a(x - y) - (A(x) - A(y)), A(x) - A(y)).$$

Astfel

$$(1.33) \qquad (A(x) - A(y), \ x - y) \geqslant (1/2a)\,\|A(x) - A(y)\|^2, \ \forall x, y \in H.$$

Să observăm că mulțimea $A^{-1}(0)$ coincide cu mulțimea punctelor fixe ale operatorului T. Pentru $y_0 \in A\ (0)$ avem din (1.33)

$$(1.34) \qquad A(x), \ x - y_0) \geqslant (1/2a)\,\|A(x)\|^2, \ \forall x \in H.$$

Relația (1.34) arată că $\forall y_0 \in A^{-1}(0)$ are loc (1.28), întrucît A este demiînchis. Așadar A este demipozitiv, deci se poate aplica Teorema 1.5 pentru a obține concluzia dorită.

Cazul (I_3). Amintim că (vezi Cap. I, §.2), pentru orice $x \in \overline{D(A)} = \overline{D(B)}$ și $t > 0$, $S(t)x \in D(B)$ și funcția $u(t) = S(t)x$ nu este altceva decît unica soluție a problemei

$$(1.35) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}^2u(t)/\mathrm{d}t^2 \in B(u(t)), & \text{a.p.t. } t \in \mathbf{R}_+ \\ u(0) = x\,; \ \sup\limits_{t \geqslant 0} \|u(t)\| < +\infty. \end{cases}$$

În plus, conform Teoremei 2.9 din Cap. I,

$$(1.36) \qquad t\,\|\mathrm{d}u/\mathrm{d}t\| \in L^\infty(\mathbf{R}_+), \ \forall x \in \overline{D(A)}.$$

Din (1.36) rezultă că

$$(1.37) \qquad \forall x \in \overline{D(A)}, \ A^0(S(t)x) \to 0, \text{ cînd } t \to \infty.$$

Folosind (1.37) se poate obține imediat că $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\omega_w(x) \subset A^{-1}(0)$. Astfel concluzia teoremei rezultă din Teorema 1.4. Este interesant de remarcat în plus că $A^{-1}(0) = B^{-1}(0)$.

Cazul (I_4): Amintim că A impar înseamnă $D(A) = -D(A)$ și $\forall x \in D(A)$, $A(-x) = -A(x)$. Rezultă atunci că $\overline{D(A)} = -\overline{D(A)}$ și pentru orice $t \geqslant 0$, $S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$ este impar. Deoarece $\overline{D(A)}$ este convexă $0 \in \overline{D(A)}$. Deci $S(t)0 = 0$, $\forall t \geqslant 0$ și prin urmare $A^0(0) = 0$, adică $0 \in A^{-1}(0)$. Vom arăta că A este demipozitiv în raport cu 0.

Scanned with OKEN Scanner

Fie aşadar $x_n \rightharpoonup x$, $v_n \in A(x_n)$ şi presupunem că $\{v_n\}$ este mărginit şi $(v_n, x) \to 0$. Fără a restrînge generalitatea se poate presupune că $v_n \rightharpoonup v$. Deoarece A este monoton şi impar $(v_n \pm v_m, x_n \pm x_m) \geqslant 0$ deci

$$(v_n, x_n) + (v_m, x_m) \geqslant |(v_n, x_m) + (v_m, x_n)|. \tag{1.38}$$

Dacă în această inegalitate facem ca n şi m să tindă succesiv la ∞ se obţine că $(v, x) = 0$. Pe de altă parte, condiţiile $x_n \rightharpoonup x$, $v_n \rightharpoonup v$, $v_n \in A(x_n)$ şi $(v_n, x_n) \to (v, x)$ $(= 0)$ implică $v \in A(x)$. Într-adevăr, aceasta rezultă trecînd la limită în inegalitatea $(v_n - w, x_n - u) \geqslant 0$, $\forall [u, w] \in A$ şi ţinînd cont de maximalitatea lui A.

Recapitulînd, am arătat că $(v, x) = 0$ şi $v \in A(x)$. Atunci (1.31) implică $x \in A^{-1}(0)$. În concluzie A este demipozitiv şi atunci concluzia rezultă şi în acest caz aplicînd Teorema 1.5.

Astfel, teorema este complet demonstrată. ■

Notă bibliografică. Propoziţia 1.1 şi Teorema 1.5 sînt datorate în esenţă lui R. E. Bruck [2]. Tot lui R. E. Bruck [2] îi aparţin punctele (I_2) şi (I_4) ale Teoremei 1.6, în timp ce punctele (I_1) şi (I_3) ale acestei teoreme aparţin lui G. H. Pimbley şi B. Nicolaenko [1] şi respectiv autorului.

■ *Observaţia* 1.7. Să remarcăm că în cazurile $A = \partial\varphi$ şi $A = B^{1/2}$ concluziile Teoremei 1.6 pot fi desprinse şi din rezultatul de comparaţie pe care-l expunem în continuare, rezultat care este interesant şi în sine şi pentru alte semnificaţii pe care le vom pune în evidenţă în cele ce urmează.

Propoziţia 1.2. *Presupunem că* $A = \partial\varphi$ *cu* $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ *sau* $A = B^{1/2}$ *(unde* $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *este proprie, convexă şi inferior semicontinuă;* $B : D(B) \subset H \to H$ *este maximal monoton cu* $B^{-1}(0) \neq \emptyset$*). Atunci*

$$\lim_{t\to\infty} \left\| S(t)x - (1/t)\int_0^t S(s)x\, ds \right\| = 0, \quad \forall x \in \overline{D(A)}. \tag{1.39}$$

Notă bibliografică. În cazul $A = \partial\varphi$ Propoziţia 1.2 aparţine lui R. E. Bruck [2].

Demonstraţie. În ambele cazuri avem

$$t\left\| \frac{d}{dt} S(t)x \right\|^2 \in L^1(\mathbf{R}_+), \quad \forall x \in \overline{D(A)}. \tag{1.40}$$

Într-adevăr, în cazul $A = \partial\varphi$, (1.40) rezultă din estimarea (2.51), Cap. I, § 2, în care luăm $x_0 \in A^{-1}(0)$ şi $y_0 = 0$; pentru cazul $A = B^{1/2}$ vezi Teorema 2.8 din Cap. I, § 2.

Deoarece funcţia $t \mapsto \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)x \right\|$ este descrescătoare pe $\mathbf{R}_+$ putem scrie că

$$t\left\| \frac{d}{dt} S(t)x \right\| \leqslant h(t), \text{ a.p.t. } t > 0 \ (\forall t \geqslant 0 \text{ în cazul } A = B^{1/2}), \tag{1.41}$$

unde $h(t) = ((8/3)\int_{t/2}^t s \left\| \frac{d}{ds} S(s)x \right\|^2 ds)^{1/2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din (1.40) se vede că $h(t) \to 0$, pentru $t \to \infty$. Prin urmare relaţia (1.41) implică

$$(1/t)\int_0^t s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S(s)x\,\mathrm{d}s \to 0, \text{ pentru } t \to \infty, \text{ tare în } H,$$

ceea ce demonstrează teorema deoarece

$$S(t)x - (1/t)\int_0^t S(s)x\,\mathrm{d}s = (1/t)\int_0^t s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S(s)\,x\,\mathrm{d}s. \blacksquare$$

Teorema 1.7. *Presupunem că* $A = \partial\varphi$ *cu* $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *proprie, convexă şi inferior semicontinuă,* $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ *şi* $f \in L^2(\mathbf{R}_+; H)$. *Fie* $z(t)$, $t \geqslant 0$ *o soluţie oarecare a ecuaţiei* (E). *Atunci*

(1.42) $$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t \in L^2(\delta, \infty; H), \ \forall \delta > 0 \text{ şi}$$

(1.43) $$\text{există } \lim_{t\to\infty} \varphi(z(t)) = \varphi_\infty \in \mathbf{R}.$$

Dacă se presupune în plus că $z(t)$ *este mărginită pe* $\mathbf{R}_+$ *atunci*

(1.44) $$\varphi_\infty = \inf\{\varphi(u);\ u \in H\}.$$

Dacă se mai presupune că $A^{-1}(0)$ *are un singur element, să zicem* q, *atunci* $z(t) \to q$, *cînd* $t \to \infty$.

Notă bibliografică. Teorema 1.7 a fost demonstrată de autor [2].

Demonstraţie. Amintim mai întîi (Teorema 2.4, Cap. I) că $z(t) \in C([0, T]; H) \cap W^{1,2}(\delta, T; H)$, pentru orice δ, T cu $0 < \delta < T < \infty$. Ca în demonstraţia Teoremei 2.4 din Cap. I avem

(1.45) $$(1/2)\left\|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(z(t)) \leqslant (1/2)\,\|f(t)\|^2, \text{ a.p.t. } t > 0$$

care indică faptul că funcţia

(1.46) $$t \mapsto \varphi(z(t)) - (1/2)\int_0^t \left\|f(s)\right\|^2 \mathrm{d}s$$

este monoton descrescătoare pe $\mathbf{R}_+$.

Pe de altă parte, cum $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ avem $\inf\{\varphi(u);\ u \in H\} = \varphi(p) > -\infty$, $p \in A^{-1}(0)$. Astfel, (1.46) are limită finită, cînd $t \to \infty$, prin urmare (1.43) este satisfăcută întrucît $f \in L^2(\mathbf{R}_+; H)$. Atunci (1.45) implică imediat şi (1.42). Să presupunem acum în plus că $z(t)$ este mărginită pe $\mathbf{R}_+$. Avem, evident,

(1.47) $$\varphi(z(t)) \leqslant \varphi(v) + (h(t),\ z(t) - v), \quad \forall v \in D(\varphi),$$

unde $h(t) = f(t) - (\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)(t) \in L^2(\delta, \infty; H)$, $\forall \delta > 0$.

Fie $t_n \to \infty$ petru care $z(t_n)$ converge slab, să zicem la p, şi simultan $(h(t_n),\ z(t_n) - v)$ converge la 0. Luăm $t = t_n$ în (1.47) şi trecem la limită ţinînd cont că φ este slab semicontinuă inferior (vezi § 1, Secţiunea 1.2, Cap. I). Rezultă $\varphi_\infty = \varphi(p) \leqslant \varphi(v)$, $\forall v \in D(\varphi)$ adică tocmai (1.44). Evident am arătat că mulţimea limitelor slabe pentru $z(t)$, cînd $t \to \infty$ este inclusă în $A^{-1}(0)$. Din păcate acest fapt nu este suficient pentru a aplica lema lui Opial şi a deduce astfel convergenţa slabă a lui $z(t)$, cînd $t \to \infty$, întrucît în cazul $f \in L^2(\mathbf{R}_+; H)$ nu avem (1.10). Totuşi dacă $A^{-1}(0) = \{q\}$, atunci evident $z(t) \to q$, cînd $t \to \infty$. $\blacksquare$

Observaţia 1.8. Din demonstraţia de mai sus rezultă că fără presupunerea $A^{-1}(0) \neq \emptyset$, (1.43) rămîne adevărată cu $\varphi_\infty \in [-\infty, +\infty[$ sau chiar cu $\varphi_\infty \in \mathbf{R}$ dacă presupunem că $\inf \varphi > -\infty$.

În altă ordine de idei, mărginirea soluţiei $z(t)$ pe $\mathbf{R}_+$ rezultă, de exemplu, dacă se adaugă una din condiţiile următoare:

(1°) $f \in L^1(\mathbf{R}_+; H)$ (vezi Observaţia 1.2) sau (2°) $\lim_{\|u\|\to\infty} \varphi(u) = +\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

1.5. Cîteva comentarii

1°. În general, nu putem spune care punct din $A^{-1}(0)$ reprezintă limita slabă (cînd aceasta există) a unei traiectorii a semigrupului. Totuși dacă A este univoc, liniar, dens definit, maximal monoton și autoadjunct, atunci (vezi R. E. Bruck [2]) $S(t)x \to \mathrm{Proi}_{N(A)}x$, cînd $t \to \infty$, unde $N(A) = A^{-1}(0)$ (nucleul lui A).

În acest caz (vezi § 1, Cap. I) A este subdiferențiala funcției $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ definită prin

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1/2)\,\|A^{1/2}(x)\|^2, & \text{dacă } x \in D(A^{1/2}) \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Deci există $p \in N(A)$, astfel încît $S(t)x \to p$, cînd $t \to \infty$. Mai departe, pentru orice $y \in N(A)$

$$(S(t)x - x, y) = \int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S(s)\ x,\ y\right) \mathrm{d}s =$$

$$= -\int_0^t (A(S(s)x),\ y)\ \mathrm{d}s = -\int_0^t (S(s)x,\ A(y))\ \mathrm{d}s = 0.$$

Trecînd la limită cu $t \to \infty$ se obține $p - x \in N(A)^{\perp}$ (ortogonalul spațiului $N(A)$), deci $p = \mathrm{Proi}_{N(A)}\, x$. Să remarcăm că în acest caz limita slabă pentru $S(t)x$ coincide cu limita rezolventei $J_t x$, cînd $t \to \infty$ (vezi Teorema 1.1).

2°. În [2] J. B. Baillon dă un exemplu de semigrup pe spațiul l^2 generat de o subdiferențială astfel încît $S(t)x$ converge slab, pentru $t \to \infty$, $\forall x \in \overline{D(A)}$ dar pentru care există un x_0 astfel încît $S(t)x_0$ nu converge tare. Acest exemplu arată că în spații infinit dimensionale nu trebuie să ne așteptăm, în general, la convergența tare a traiectoriilor semigrupurilor. Propoziția 1.2 arată că de asemenea media $\sigma(t)x$ nu converge, în general, tare pentru $t \to \infty$. În schimb, conform Teoremelor 1.1 și 1.2, condiția $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ este întotdeauna echivalentă cu convergența slabă a mediei. Condiția $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ nu este însă suficientă pentru a asigura, în general, convergența pentru $S(t)x$, cînd $t \to \infty$. Un contraexemplu simplu în acest sens este următorul: $H = \mathbf{R}^2$, $A([x,y]) = [-y,x]$ (A este rotația de unghi $\pi/2$). Un calcul elementar ne conduce în acest caz la

$$S(t)\ [x, y] = [x \cos t + y \sin t,\ -x \sin t + y \cos t].$$

Un fapt surprinzător, demonstrat în Teorema 1.1, este că ipoteza $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ este echivalentă cu convergența tare a rezolvantei $J_t x$, pentru $t \to \infty$, $\forall x \in H$.

3°. După cum reiese din rezultatele secțiunilor precedente condiția $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$ este foarte potrivită pentru obținerea comportării asimptotice a mediilor sau chiar a soluțiilor ecuației (E), pentru $t \to \infty$. Teorema 1.7 confirmă această afirmație, întrucît concluziile obținute acolo în condiția diferită $f \in L^2(\mathbf{R}_+ ; H)$ sînt considerabil mai sărace chiar pentru cazul subdiferențialei. Tot în sprijinul afirmației făcute se poate da și următorul contraexemplu simplu: $H = \mathbf{R}$, $A \equiv 0$ și $f(t) = 1/(1+t)$. Evident în acest caz toate soluțiile ecuației (E) sînt nemărginite pentru $t \to \infty$. Totuși dacă A se consideră coerciv atunci se poate obține mărginirea soluțiilor pe semiaxă chiar renunțînd la condiția $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$. Acest fapt se vede clar din rezultatul pe care-l expunem în continuare (A. Haraux [1]).

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.8. *Presupunem că* $A : D(A) \subset H \to H$ *este maximal monoton și* $\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in D(A)}} (Ax, x)/\|x\| = +\infty$. *Mai presupunem că există o constantă* $C > 0$ *astfel încît*

$$\forall t \geqslant 0, \int_t^{t+1} \|f(s)\| \, ds \leqslant C. \tag{1.48}$$

Atunci toate soluțiile ecuației (E) *sînt mărginite pe* $\mathbf{R}_+$.

Demonstrație. Deoarece A este coerciv, $R(A) = H$, deci există $p \in A^{-1}(0)$. Fie $z(t)$, $t \geqslant 0$ o soluție slabă a ecuației (E). Atunci, evident,

$$(1/2)\ \|z(t+1) - p\|^2 \leqslant (1/2)\ \|z(s) - p\|^2 + \int_s^{t+1} \|f(r)\| \cdot \|z(r) - p\|\, dr, \text{ pentru } 0 \leqslant s \leqslant t+1 < \infty$$

ceea ce implică $\|z(t+1) - p\| \leqslant \|z(s) - p\| + C$, $\forall s \in [t, t+1]$, $t \geqslant 0$. Deci

$$\|z(t+1)\| \leqslant \inf \{\|z(s)\|;\ t \leqslant s \leqslant t+1\} + C + 2\ \|p\|, \ \forall t \geqslant 0 \tag{1.49}$$

Fie $K > 0$ suficient de mare astfel încît

$$(Ax, x)/\|x\| \geqslant C, \quad \forall x \in D(A) \text{ cu } \|x\| \geqslant K. \tag{1.50}$$

Presupunem că există $t > 0$ astfel încît $V(t) \geqslant K$, unde $V(t) = \inf\{\|z(s)\|;\ t \leqslant s \leqslant t+1\}$.

În caz contrar demonstrația se încheie datorită relației (1.49). Să admitem pentru moment că $z(t)$ este soluție tare. Înmulțind ecuația (E) cu $z(t)$ și integrînd de la s la $t+1$ se deduce, ținînd cont de (1.48) și (1.50), $\|z(t+1)\| \leqslant \|z(t)\|$. Prin urmare $\|z(t+1)\| \leqslant \max(K + C + 2\|p\|, \|z(t)\|)$, $\forall t \geqslant 0$. Notăm $U(t) = \max(K + C + 2\|p\|, \|z(t)\|)$, $t \geqslant 0$. Atunci evident $U(t+1) \leqslant U(t)$, $t \geqslant 0$. Mai departe, combinînd relațiile de mai sus avem

$$\|z(t+1)\| \leqslant U(t) \leqslant \sup\{U(r);\ 0 \leqslant r \leqslant 1\} =$$
$$= \max(K + C + 2\|p\|, \sup\{\|z(r)\|;\ 0 \leqslant r \leqslant 1\}),\ t \geqslant 0.$$

Deci

$$\|z(t)\| \leqslant \max(K + C + 2\|p\|, \|z(0)\| + C + 2\|p\|),\ t \geqslant 0. \tag{1.51}$$

Astfel $z(t)$ este mărginită pe $\mathbf{R}_+$. Evident inegalitatea (1.51) se poate extinde pentru orice soluție slabă $z(t)$. Într-adevăr, fixînd temporar un interval $[0, T]$, din faptul că $z(t)$ este soluție slabă rezultă că există șirurile $\{z_n\} \subset W^{1,\infty}(0, T; H)$ și $\{f_n\} \subset L^1(0, T; H)$ astfel încît pentru fiecare n natural, z_n satisface a.p.t. ecuația (E) pe $]0, T[$ cu f_n în loc de f, apoi $f_n \to f$ în $L^1(0, T; H)$ și $z_n \to z$ în $C([0, T]; H)$. Astfel este vizibil că (1.51) rămîne adevărată pentru orice soluție slabă. Cu aceasta Teorema 1.8 este complet demonstrată. ■

1.6. Soluții cu creștere subliniară

Începem această secțiune prin a remarca că dacă $A : D(A) \subset H \to H$ este un operator maximal monoton și $f(t)$ satisface condiția

$$\int_0^t \|f(s)\| ds \leqslant C_1 t + C_2, \ \forall t \geqslant 0, \tag{1.52}$$

atunci orice soluție slabă $z(t)$, $t \geqslant 0$, a ecuației (E) are creștere subliniară pentru $t \to \infty$, adică

$$\limsup_{t \to \infty} (1/t)\ \|z(t)\| = C_3 < +\infty. \tag{1.53}$$

Scanned with OKEN Scanner

Estimarea (1.53) rezultă imediat din inegalitatea cunoscută

$$\|z(t) - x\| \leqslant z(0) - x\| + \int_0^t \|f(s) - y\|\, ds, \quad \forall [x,y] \in A, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Exemple de funcţii care satisfac (1.52):
a) $f \in L^1(\mathbf{R}_+; H)$,
b) $f \in L^\infty(\mathbf{R}_+; H)$,
c) $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+; H)$ şi f periodică etc.

Continuăm cu un rezultat mai precis, deocamdată în cazul $f \equiv 0$.

Teorema 1.9. (M. G. Crandall). *Se presupune că* $A : D(A) \subset H \to H$ *este maximal monoton. Se notează, ca de obicei, cu* $\{S(t); \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}; t \geqslant 0\}$ *semigrupul generat de* $-A$. *Atunci, există*

$$\lim_{t\to\infty} (1/t) S(t)x = -a^0, \quad \forall x \in \overline{D(A)}, \tag{1.54}$$

unde a^0 *este elementul de normă minimă în* $\overline{R(A)}$.

Demonstraţie. Deoarece $\overline{R(A)}$ este închisă şi convexă rezultă că există un element de normă minimă în $\overline{R(A)}$ unic, notat în enunţul teoremei cu a^0. Fie $\{y_n\} \subset R(A)$, astfel încît $y_n \to a^0$, cînd $n \to \infty$. Atunci, pentru fiecare n, există $x_n \in D(A)$ astfel încît $y_n \in A(x_n)$. Deoarece a^0 este proiecţia lui 0 pe $\overline{R(A)}$ avem $(a^0, a^0 - v) \leqslant 0$, $\forall v \in \overline{R(A)}$. Prin urmare

$$\|A^0(S(t)x_n) - a^0\|^2 = \|A^0(S(t)x_n)\|^2 - 2(a^0, A^0(S(t)x_n)) + \\ + \|a^0\|^2 \leqslant \|A^0(S(t)x_n)\|^2 - \|a^0\|^2.$$

Pe de altă parte $\|A^0(S(t)\, x_n)\| \leqslant \|A^0(x_n)\| \leqslant \|y_n\|$. Ultimele două relaţii implică următoarea $\|A^0(S(t)x_n) - a^0\|^2 \leqslant \|y_n\|^2 - \|a^0\|^2$. Deci

$$A^0(S(t)x_n) \to a^0, \text{ cînd } n \to \infty, \text{ uniform în raport cu } t \geqslant 0. \tag{1.55}$$

Acum, deoarece $S(t)x_n = x_n - \int_0^t A^0(S(s)x_n)ds$, $\forall t \geqslant 0$ rezultă că

$$\left\| \frac{S(t)x}{t} + a^0 \right\| \leqslant \frac{\|x_n\| + \|x - x_n\|}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \|A^0(S(s)x_n) - a^0\|\, ds, \quad \forall t > 0. \tag{1.56}$$

Din (1.55) rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există n suficient de mare astfel încît $\|A^0(S(s)\ x_n) - a^0\| < \varepsilon$. Aceasta, împreună cu (1.56), implică $\limsup_{t\to\infty} \left\| \frac{S(t)x}{t} + a^0 \right\| < \varepsilon$ de unde rezultă că (1.54) este într-adevăr îndeplinită. ■

Observaţia 1.9. În ipoteza $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ (echivalent $0 \in R(A)$) Teorema 1.9 ar rezulta în mod banal ca o consecinţă a echivalenţei (i) $\Leftrightarrow$ (ii) din Teorema 1.1.

Observaţia 1.10. Am văzut mai sus că, prin cîteva aspecte, comportarea rezolventei J_t a unui operator maximal monoton A, pentru $t \to \infty$, seamănă cu comportarea traiectoriilor semigrupului generat de $-A$. Este iarăşi surprinzător să observăm că

$$\lim_{t\to\infty} \frac{J_t x}{t} = -a^0, \ \forall x \in H, \text{ unde } J_t = (I + tA)^{-1}, \tag{1.57}$$

adică are loc o relaţie de tipul (1.54), a^0 fiind din nou elementul de normă minimă în $\overline{R(A)}$. Pentru demonstraţia relaţiei (1.57) indicăm Nota [1] a autorului.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 1.11. Presupunem că

$$f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+ ; H) \text{ și } (1/t)\int_0^t \| f(s)\| \, ds \to 0, \text{ pentru } t \to \infty. \tag{1.58}$$

Fie $z(t)$, $t \geqslant 0$, o soluție slabă oarecare a ecuației (E) cu A maximal monoton. Atunci $(1/t)z(t) \to -a^0$, cînd $t \to \infty$, unde a^0 este, la fel ca mai sus, elementul de normă minimă în $\overline{R(A)}$. Acest fapt rezultă din inegalitatea evidentă

$$\|z(t) - S(t)z(0)\| \leqslant \int_0^t \| f(s)\| ds, \ \forall t \geqslant 0, \tag{1.59}$$

ținînd cont de (1.58) și de Teorema 1.9.

Exemple de funcții care verifică (1.58):

(a) $f \in L^p(\mathbf{R}_+ ; H)$, $1 \leqslant p < +\infty$,

(b) $f \in C([0, \infty +[; H)$ și $f(t) \to 0$, cînd $t \to \infty$ etc.

O altă generalizare la cazul neomogen a Teoremei 1.9 o constituie rezultatul expus în continuare (aparținînd lui A. Haraux [1]) în care $A = \partial\varphi$ iar f îndeplinește condiții diferite de cele prevăzute la (1.58).

Teorema 1.10. *Presupunem că* $A = \partial\varphi$, *unde* $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *este o funcție proprie, convexă și inferior semicontinuă iar* $f : \mathbf{R}_+ \to H$ *îndeplinește condițiile*:

$$\int_0^t \| f(s) \|^2 \, ds \leqslant C_1 t + C_2, \ \forall t \geqslant 0 ; \tag{1.60}$$

$$(1/t)\int_0^t f(s)ds \to 0, \ \textit{pentru } t \to \infty. \tag{1.61}$$

Atunci

$$(1/t)\, z(t) \to -a^0, \ \textit{pentru } t \to \infty,$$

unde a^0 *este elementul de normă minimă în mulțimea* $\overline{R(A)}$, *iar* $z(t)$, $t \geqslant 0$ *este o soluție slabă oarecare a ecuației* (E).

Demonstrație. Deoarece $z(t)$ este soluție slabă pentru (E) avem

$$(1/2)\, \|z(t) - v\|^2 \leqslant (1/2)\, \|z(0) - v\|^2 + \tag{1.62}$$
$$+ \int_0^t (f(s), \, z(s))\, ds - \left(\int_0^t f(s)ds, \, v\right) + t(w, \, v) +$$
$$+ \|w\| \int_0^t \|z(s)\| \, ds, \ \forall t \geqslant 0, \ \forall [v, \, w] \in A.$$

Vom arăta în continuare că

$$(1/t^2)\int_0^t (f(s), \, z(s))\, ds \to 0, \text{ pentru } t \to \infty, \tag{1.63}$$

unde, după cum se va vedea, intră esențial faptul că A este subdiferențială. Mai întîi să observăm că datorită ipotezei (1.60) rezultă conform Teoremei 1.9 și inegalității (1.59)

$$\|z(t)\| \leqslant C_3 t + C_4, \ \forall t \geqslant 0. \tag{1.64}$$

Integrînd inegalitatea (1.45) pe $[0, t]$ obținem

$$(1/2)\int_0^t \left\| \frac{dz}{ds}(s) \right\|^2 ds + \varphi(z(t)) \leqslant \varphi(z(0)) + (1/2)\int_0^t \|f(s)\|^2 ds, \ \forall t \geqslant 0. \tag{1.65}$$

Scanned with OKEN Scanner

Am presupus că $z(0) \in D(\partial\varphi)$, fapt ce nu restrînge generalitatea. Mai departe, folosind (1.64) și faptul că φ este minorată de o funcție afină (vezi Teorema 1.8, Cap. I) se deduce

$$\int_0^t \|(dz/ds)\,(s)\|^2\,ds \leqslant C_5 t + C_6,\ \forall t \geqslant 0. \tag{1.66}$$

Să notăm acum

$$h(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

Atunci

$$\int_0^t (f(s), z(s))\,ds = \int_0^t \left(\frac{dh}{ds}(s),\ z(s)\right) ds = \tag{1.67}$$

$$= (h(t), z(t)) - \int_0^t \left(h(s), \frac{dz}{ds}(s)\right) ds,\quad t \geqslant 0.$$

Deoarece, prin ipoteza (1.61), avem $\frac{1}{t}\,h(t) \to 0$, pentru $t \to \infty$ este clar, ținînd cont și de (1.64), că

$$\frac{1}{t^2}\,(h(t), z(t)) \to 0,\ \text{pentru } t \to \infty. \tag{1.68}$$

Pe de altă parte, conform cu (1.66),

$$\left|\int_0^t \left(h(s), \frac{dz}{ds}(s)\right) ds\right| \leqslant (C_5 t + C_6)^{1/2} \left(\int_0^t \|h(s)\|^2\,ds\right)^{1/2},\ \forall t \geqslant 0.$$

Dar evident

$$\frac{1}{t^3}\int_0^t \|h(s)\|^2\,ds \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t \left\|\frac{h(s)}{s}\right\|^2 ds \to 0,\ \text{pentru } t \to \infty.$$

Prin urmare

$$\frac{1}{t^2}\left|\int_0^t \left(h(s),\ \frac{dz}{ds}(s)\right) ds\right| \to 0,\ \text{pentru } t \to \infty. \tag{1.69}$$

Relațiile (1.67), (1.68) și (1.69) implică evident (1.63). Atunci din (1.62) se deduce, printr-un raționament elementar, că $\limsup_{t\to\infty} \|z(t)\|/t \leqslant \|w\|$, $\forall w \in R(A)$. Prin urmare

$$\limsup_{t\to\infty} \|z(t)\|/t \leqslant \|a^0\|. \tag{1.70}$$

Fie acum $t_n \to \infty$ și $w \in H$ astfel încît $z(t_n)/t_n \to w$, pentru $n \to \infty$. Atunci, deoarece

$$\frac{z(t_n) - z(0)}{t_n} + \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} g(s)\,ds = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} f(s)\,ds,\ \text{unde } g(s) \in A(z(s)),\ s > 0$$

este clar că $-w \in \overline{R(A)}$. Mai departe, din (1.70) rezultă că $w = -a^0$. Deci $z(t)/t \to -a^0$, pentru $t \to \infty$. Dar convergența este chiar tare datorită inegalității (1.70). Astfel Teorema 1.10 este complet demonstrată. ■

Scanned with OKEN Scanner

Observația 1.12. Dacă A nu este subdiferențială, atunci Teorema 1.10 nu este adevărată. Următorul contraexemplu simplu justifică afirmația: $H = \mathbf{R}^2$, $A([x, y]) = [-y, x]$, $\forall [x, y] \in H$ și $f(t) = [\cos t, 0]$, $t \geqslant 0$. În acest caz ecuația (E) are soluția generală

$$z(t) = [\alpha \cos t + \beta \sin t + \frac{t}{2} \cos t, \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \cos t + \left(\frac{t}{2} + \alpha\right) \sin t], \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

§ 2. CONVERGENȚA ÎN TOPOLOGIA TARE A SOLUȚIILOR SAU A MEDIILOR LOR, PENTRU $t \to \infty$

2.1. Convergența tare a mediilor în cazul impar

Amintim că un operator (posibil multivoc) $T : D(T) \subset H \to H$ se numește *impar* dacă $D(T) = -D(T)$ și $T(-x) = -T(x)$, $\forall x \in D(T)$. În cazul operatorilor monotoni multivoci noțiunea de imparitate este clarificată de rezultatul simplu care urmează.

Propoziția 2.1. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator maximal monoton. Se notează cu A^0 secțiunea minimală a lui A și cu $\{S(t); t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente:*

(a_1) *A^0 este impar;*

(a_2) *A este impar;*

(a_3) *Semigrupul $\{S(t); t \geqslant 0\}$ este impar, adică pentru orice $t \geqslant 0$ operatorul $S(t)$ este impar.*

Demonstrație. $(a_1) \Rightarrow (a_2)$: Presupunem așadar că A^0 este impar. Cum $D(A^0) = D(A)$ urmează că $D(A) = -D(A)$. Pentru a arăta că A este impar ar fi suficient să arătăm că

$$A(x) \subset -A(-x), \ \forall x \in D(A). \tag{2.1}$$

Fie $w \in A(x)$. Deoarece A^0 este impar avem $(A^0(y) + w, y + x) \geqslant 0$, $\forall y \in D(A)$. Amintind că A^0 este secțiune principală (vezi Propoziția 1.2, Cap. I) rezultă atunci $w \in -A(-x)$, adică (2.1) este îndeplinită. Implicația $(a_2) \Rightarrow (a_3)$ a fost pusă deja în evidență în demonstrația Teoremei 1.6. Într-adevăr, aceasta rezultă banal ținînd cont că pentru $x \in D(A)$ funcția $z(t) = S(t)x$, $t \geqslant 0$, este soluție tare unică a ecuației

$$(\mathrm{E}_0) \qquad dz/dt + A(z) \ni 0, \ t > 0.$$

În fine, implicația $(a_3) \Rightarrow (a_1)$ care încheie demonstrația, rezultă tot banal folosind definiția generatorului infinitezimal și faptul că $-A^0$ este generatorul semigrupului $\{S(t); t \geqslant 0\}$. ■

Teorema 2.1. *Presupunem că $A : D(A) \subset H \to H$ este un operator maximal monoton, impar și $f \in L^1(\mathbf{R}_+; H)$. Fie $z(t)$, $t \geqslant 0$ o soluție slabă oarecare a ecuației* (E). *Atunci, media $\sigma_z(t)$, definită la* (1.8), *converge tare la p, unde $p = \lim_{t \to \infty} \mathrm{Proi}_F z(t)$ cu $F = A^{-1}(0)$.*

Notă bibliografică. Teorema 2.1 reprezintă o generalizare la cazul neomogen a unui rezultat al lui J. B. Baillon [3] (vezi, de asemenea J. B. Baillon [1]).

Demonstrație. După cum remarcam în demonstrația Teoremei 1.6 $A^0(0) = 0$, deci F este nevidă, conținînd cel puțin elementul nul. Deoarece

$z(t)$ și $-z(t)$ sînt soluții slabe ale ecuației (E) cu $f(t)$ și respectiv $-f(t)$ se obține

$$\|z(t+h) \pm z(t)\| \leqslant \|z(s+h) \pm z(s)\| + \int_s^t \|f(r+h) \pm \pm f(r)\| \, dr, \text{ pentru } t \geqslant s \geqslant 0, \ h \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Astfel, deoarece $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$, există $\delta_\pm(h) = \lim_{t\to\infty} \|z(t+h) \pm z(t)\|$, $h \geqslant 0$. Mai departe, întrucît $\|z(t) - q\| \leqslant \|z(s) - q\| + \int_s^t \|f(r)\| \, dr$, $\forall q \in F$, $t \geqslant s \geqslant 0$, există

$$d(q) = \lim_{t\to\infty} \|z(t) - q\|, \ \forall q \in F. \tag{2.3}$$

Notăm $d(0) = d$. În continuare, folosind (2.2) deducem $\|z(t+h)\|^2 + \|z(t)\|^2 \pm 2(z(t+h), z(t)) \leqslant \|z(s+h)\|^2 + \|z(s)\|^2 \pm 2(z(s+h), z(s)) + \omega(s)$, pentru $t \geqslant s \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, unde $\omega(s) \to 0$ pentu $s \to \infty$. Prin urmare $2\,|(z(t+h), z(t)) - (z(s+h), z(s))| \leqslant \|z(s)\|^2 - \|z(t)\|^2 + \|z(s+h)\|^2 - \|z(t+h)\|^2 + \omega(s)$, pentru $t \geqslant s \geqslant 0$, $h \geqslant 0$. De aici rezultă că există

$$l(h) = \lim_{t\to\infty} (z(t+h), z(t), \textit{ uniform în raport cu } h, \tag{2.4}$$

datorită lui (2.3) cu $q = 0$. În continuare, vom arăta că

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta_\pm^2(h)\,dh = 2(d^2 \pm \|p\|^2). \tag{2.5}$$

Mai întîi, conform relației (2.2), $\delta_\pm(h) \leqslant \|z(t+h) \pm z(t)\| + \int_t^\infty \|f(h+r) \pm \pm f(r)\| \, dr$, $\forall t \geqslant 0$, $h \geqslant 0$. Prin urmare $\frac{1}{T}\int_0^T \delta_\pm^2(h)\,dh \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \|z(t+h)\|^2 dh + \|z(t)\|^2 \pm \frac{2}{T}\left(\int_0^T z(t+h)\, dh, \, z(t)\right) + \alpha(t), \ \forall t \geqslant 0,$$

unde $\alpha(t) \to 0$, pentru $t \to \infty$. Ținînd cont de Teorema 1.2 deducem $\lim\sup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_\pm^2(h)dh \leqslant d^2 + \|z(t)\|^2 \pm 2(p, z(t)) + \alpha(t)$, $\forall t \geqslant 0$. Dacă se trece la limită cînd $t \to \infty$ în această inegalitate se găsește

$$\lim\sup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_\pm^2(h)dh \leqslant 2(d^2 \pm \|p\|^2). \tag{2.6}$$

Pentru a obține (2.6) am folosit faptul că $(p, z(t)) \to \|p\|^2$, pentru $t \to \infty$. Într-adevăr, deoarece $2(p, z(t)) = \|z(t)\|^2 + \|p\|^2 - \|z(t) - p\|^2$, rezultă că există $\lim_{t\to\infty}(p, z(t)) = l$. Însă $\lim_{t\to\infty}(p, z(t)) = \lim_{t\to\infty}(p, \sigma_z(t)) = \|p\|^2$, conform Teoremei 1.2. Deci $l = \|p\|^2$, așa cum am afirmat. Pe de altă parte, este ușor de văzut că $\delta_\pm^2(h) + \delta_\mp^2(h) = 4d^2$. Deci, avînd în vedere și (2.6), se obține

$$\lim\inf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_\pm^2(h)\,dh = 4d^2 - \lim\sup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_\mp^2(h)dh \geqslant 2\,(d^2 \pm \|p\|^2).$$

Drept consecință, ținînd seama din nou de (2.6), se obține relația (2.5) pe care ne-am propus s-o dovedim. În următoarea etapă vom arăta că

$$\lim_{h\to\infty}\lim_{t\to\infty} a_q(t,h) = \|p-q\|, \quad \forall q\in F, \tag{2.7}$$

unde $a_q(t,h) = \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} z(r)\,dr - q\right\|$. Este ușor de verificat că $a_q^2(t,h) = \frac{1}{h}\int_0^h \|z(t+s)-q\|^2\,ds - \frac{1}{2h^2}\int_0^h\int_0^h \|z(t+s)-z(t+s')\|^2\,ds'ds$. Trecînd la limită cu $t\to\infty$ în această egalitate obținem

$$\lim_{t\to\infty} a_q^2(t,h) = d^2(q) - \frac{1}{2h^2}\int_0^h\int_0^h \delta_-^2(|s-s'|)\,ds'\,ds.$$

Este important de subliniat că datorită lui (2.4) această limită există uniform în raport cu h. Mai departe

$$\lim_{t\to\infty} a_q^2(t,h) = d^2(q) - \frac{1}{2h^2}\int_0^h ds\int_0^s \delta_-^2(s-s')\,ds' - \tag{2.8}$$

$$-\frac{1}{2h^2}\int_0^h ds\int_s^h \delta_-^2(s'-s)\,ds' = d^2(q) - \frac{1}{h}\int_0^h \delta_-^2(s)ds +$$

$$+\frac{1}{h^2}\int_0^h s\,\delta_-^2(s)ds = d^2(q) - \frac{1}{h}\int_0^h \delta_-^2(s)ds + \frac{1}{h^2}\int_0^{h^2/2} \delta_-^2(\sqrt{2s})\,ds.$$

Reluînd acum argumentele folosite pentru a dovedi (2.5) se găsește că

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \delta_\pm^2(\sqrt{2s})\,ds = 2(d^2 \pm \|p\|^2). \tag{2.9}$$

Într-adevăr, la fel ca mai sus

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \delta_\pm^2(\sqrt{2s})\,ds \leqslant d^2 + \|z(t)\|^2 + \tag{2.10}$$

$$+\limsup_{T\to\infty}\left\{\pm\frac{2}{T}\left(\int_t^{t+\sqrt{2T}}(r-t)\,z(r)\,dr,\ z(t)\right)\right\} + \bar{\alpha}(t), \quad \forall t\geqslant 0,$$

unde $\bar{\alpha}(t)\to 0$, pentru $t\to\infty$. Pe de altă parte

$$\frac{2}{T}\int_0^{\sqrt{2T}} r\,z(r)\,dr = \frac{2}{T}\int_0^{\sqrt{2T}} r\frac{d}{dr}(r\,\sigma_z(r))\,dr = 4\,\sigma_z(\sqrt{2T}) - \frac{2}{T}\int_0^{\sqrt{2T}} r\,\sigma_z(r)dr =$$

$$= 4\,\sigma_z(\sqrt{2T}) - \frac{2}{T}\int_0^T \sigma_z(\sqrt{2r})\,dr \to 2p, \quad \text{pentru } T\to\infty.$$

Astfel (2.10) devine

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \delta_\pm^2(\sqrt{2s})\,ds \leqslant d^2 + \|z(t)\|^2 \pm 2(p, z(t)) + \bar{\alpha}(t), \ \forall t\geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Continuînd cu raţionamentul care a condus la (2.5) se obţine (2.9). Vom trece acum la limită în egalitatea (2.8), pentru $h \to \infty$, ţinînd seama de relaţiile (2.5) şi (2.9) : $\lim_{h\to\infty} \lim_{t\to\infty} a_q^2(t, h) = d^2(q) - d^2 + \|p\|^2$. Aceasta conduce imediat la (2.7) întrucît $d^2(q) = d^2 - 2(p, q) + \|q\|^2$. Pentru a termina demonstraţia să observăm că, datorită relaţiei (2.7),

$\lim_{h\to\infty} \lim_{t\to\infty} a_p(t, h) = 0$, unde limita pentru $t \to \infty$ este uniformă în raport cu h, deci $\lim_{\substack{t\to\infty \\ h\to\infty}} a_p(t, h) = 0$. Aşadar

$$\forall \varepsilon > 0,\ \overline{\lim_{h\to\infty}} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h z(t + r)\, dr - p \right\| \leqslant \varepsilon,$$ pentru t suficient de mare,

prin urmare $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{\lim_{h\to\infty}} \| \sigma_z(h) - p \| \leqslant \varepsilon$, fapt ce încheie demonstraţia teoremei. ■

Observaţia 2.1. Dacă $A = \partial\varphi$ sau $A = B^{1/2}$ (unde $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ este proprie, convexă şi semicontinuă inferior ; B este maximal monoton cu $0 \in R(B)$) şi în plus A este impar atunci orice soluţie slabă $z(t)$, $t \geqslant 0$, a ecuaţiei (E) cu $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$ converge tare în H pentru $t \to \infty$. Acest fapt este o consecinţă imediată a Propoziţiei 1.2 şi Teoremelor 1.3 şi 2.1. De remarcat că $B^{1/2}$ este impar de îndată ce B este impar. Aceasta este urmarea faptului că $\forall x \in \overline{D(B)} = \overline{D(B^{1/2})}$, $u(t) = S(t)\, x$, $t \geqslant 0$, este unica soluţie a problemei (1.35), $\{S(t) ; t \geqslant 0\}$ fiind semigrupul generat de $-B^{1/2}$. Într-adevăr, deoarece B este impar rezultă că $\{S(t) ; t \geqslant 0\}$ este impar, deci, conform Propoziţiei 2.1, $B^{1/2}$ este impar.

În cazul subdiferenţialei Propoziţia 2.1 poate fi completată cu precizări suplimentare, aşa cum se vede din

Propoziţia 2.2. *Considerăm funcţia* $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *proprie, convexă şi semicontinuă inferior. Atunci următoarele trei condiţii sînt echivalente :*

(b_1) $A = \partial\varphi$ *este impar* ;

(b_2) φ *este o funcţie pară* ;

(b_3) $\forall \lambda > 0$ (*echivalent* $\exists \lambda > 0$) φ_λ *este pară, unde* φ_λ *este regularizata funcţiei* φ.

Demonstraţie. Implicaţia (b_2) $\Rightarrow$ (b_1) este imediată. Într-adevăr, fie $[x, w] \in A$, deci $[x, w]$ satisface $\varphi(x) - \varphi(v) \leqslant (w, x - v)$, $\forall v \in D(\varphi)$. Folosind acum faptul că φ este presupusă funcţie pară se deduce că $[-x, -w] \in A$. Deci A este impar. Să remarcăm că (b_1) este echivalentă cu

(b_1)' $\forall \lambda > 0$ (echivalent $\exists \lambda > 0$) A_λ este impar,

unde A_λ este aproximanta Yosida a lui A.

Să arătăm că (b_1)' $\Rightarrow$ (b_3). Pentru aceasta definim funcţia scalară $\Phi^\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin $\Phi^\lambda(t) = \varphi_\lambda(tx)$, $\forall t \in \mathbf{R}$, unde x este un element fixat din H.

Evident $\frac{d}{dt} \Phi^\lambda(t) = (\nabla\varphi_\lambda(tx), x) = (A_\lambda(tx), x)$, $t \in \mathbf{R}$. Deci funcţia $t \mapsto (d/dt)\, \Phi^\lambda(t)$ este impară. Întrucît $\Phi^\lambda(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{d}{ds} \Phi^\lambda(s)\, ds$ rezultă că Φ^λ este pară. În particular $\Phi^\lambda(1) = \Phi^\lambda(-1)$, adică $\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(-x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar $(b_1)' \Rightarrow (b_3)$. Din prima parte a demonstraţiei avem de asemenea şi implicaţia inversă $(b_3) \Rightarrow (b_1)'$. Pentru a încheia demonstraţia este suficient să arătăm că (b_3) (considerată în formularea cu $\forall \lambda > 0$) implică (b_2). Dar aceasta este o consecinţă directă a faptului cunoscut că $\varphi_\lambda(x) \to \varphi(x)$, pentru $\lambda \to 0$, $\forall x \in H$ ■.

2.2. Condiţii suficiente pentru convergenţa tare a soluţiilor

Începem această secţiune cu următorul rezultat

Propoziţia 2.3. *Fie* $\{S(t); t \geqslant 0\}$ *semigrupul de contracţii generat de* $-A$, *unde* $A: D(A) \subset H \to H$ *este maximal monoton. Dacă, în plus,* $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ *şi există* $x \in \overline{D(A)}$ *pentru care* $\omega(x) \neq \emptyset$, *unde* $\omega(x)$ *este „mulţimea ω-limită" definită la* (1.22), *atunci* $S(t)x \to p \in F$, *pentru* $t \to \infty \Leftrightarrow S(t)x \to p$, *pentru* $t \to \infty$.

Demonstraţie. Convergenţa tare implică evident convergenţa slabă. Invers, să presupunem că $S(t)x \to p$, pentru $t \to \infty$. Deoarece $\omega(x) \neq \emptyset$ urmează că există $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)\, x \to p$. Deoarece p este un punct de echilibru, se poate scrie $\|S(t)\, x - p\| = \|S(t - t_k)\, S(t_k)\, x - S(t-t_k)p\| \leqslant \|S(t_k)\, x - p\|$, $\forall t \geqslant t_k$. Deci $S(t)x \to p$, cînd $t \to \infty$. ■

Prin urmare, condiţiile care asigură convergenţa slabă sînt condiţii suficiente pentru convergenţa tare, de îndată ce $\omega(x) \neq \emptyset$. Evident, dacă traiectoria $\{S(t)x; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă, atunci $\omega_w(x) = \omega(x) \neq \emptyset$. De aceea este important de găsit condiţii suficiente care să asigure relativa compactitate a traiectoriilor. Să dăm mai întîi următorul exemplu simplu dar folositor.

Propoziţia 2.4 *Fie* $\{S(t): \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}; t \geqslant 0\}$ *semigrupul de contracţii generat de* $-A$, A *maximal monoton. Atunci, mulţimea* $Z = \{x \in \overline{D(A)}$; traiectoria $\{S(t)x; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă$\}$ *este închisă. De asemenea, mulţimea* $Z^* = \{x \in \overline{D(A)}; S(t)x$ converge tare pentru $t \to \infty\}$ *este închisă.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \bar{Z}$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar, fixat. Atunci există $x_\varepsilon \in Z$ astfel încît $\|x_\varepsilon - x_0\| < \varepsilon/3$. Fie $\{S(t_j)x_\varepsilon; j = 1, 2, \ldots, k\}$ o $\varepsilon/3$-reţea finită pentru $\{S(t)\, x_\varepsilon; t \geqslant 0\}$. Ţinînd cont că

$$\|S(t)\, x_0 - S(t_j)x_0\| \leqslant \|S(t)x_0 - S(t)x_\varepsilon\| + \|S(t)x_\varepsilon - S(t_j)\, x_\varepsilon\| +$$

$$+ \|S(t_j)\, x_\varepsilon - S(t_j)x_0\| \leqslant \|S(t)\, x_\varepsilon - S(t_j)\, x_\varepsilon\| + 2\|x_\varepsilon - x_0\| <$$

$$< 2\varepsilon/3 + \|S(t)\, x_\varepsilon - S(t_j)\, x_\varepsilon\|,$$

urmează că $\{S(t_j)x_0; j = 1, 2, \ldots, k\}$ este o ε-reţea pentru $\{S(t)x_0; t \geqslant 0\}$. Deci $\{S(t)x_0; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă, adică $x_0 \in Z$. Prin urmare Z este într-adevăr închisă.

Să arătăm acum că Z^* este închisă. Pentru aceasta fie $x_0 \in \overline{Z^*}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in Z^*$ astfel încît $\|x_\varepsilon - x_0\| < \varepsilon/3$. Deoarece $x_\varepsilon \in Z^*$ urmează că există $T_\varepsilon > 0$ astfel încît $\|S(t)x_\varepsilon - S(t+h)x_\varepsilon\| < \varepsilon/3$, $\forall t > T_\varepsilon$, $\forall h \geqslant 0$. Atunci

$$\|S(t)\, x_0 - S(t + h)\, x_0\| \leqslant \|S(t)x_0 - S(t)\, x_\varepsilon\| + \|S(t)\, x_\varepsilon - S(t + h)x_\varepsilon\| +$$

$$+ \|S(t+h)\, x_\varepsilon - S(t+h)x_0\| < 2\|x_0 - x_\varepsilon\| + \varepsilon/3 < \varepsilon, \quad \forall t > T_\varepsilon, \quad h \geqslant 0.$$

Prin urmare $x_0 \in Z^*$. Deci $Z^* = \bar{Z}^*$. ■

Scanned with OKEN Scanner

Înainte de a enunța rezultatul următor să amintim că un operator univoc $P : D(P) = H \to H$ se numește *compact* dacă este continuu și transformă mulțimi mărginite în mulțimi relativ compacte.

Propoziția 2.5. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton și $\{S(t); t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Dacă $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ și $(I + \lambda A)^{-1}$ este compact pentru un $\lambda > 0$ (echivalent pentru $\forall \lambda > 0$), atunci, $\forall x \in \overline{D(A)}$ traiectoria $\{S(t)x; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă.*

Demonstrație. Mai întîi să arătăm că dacă $(I + \lambda_0 A)^{-1}$, $\lambda_0 > 0$ este compact, atunci $(I + \lambda A)^{-1}$ este compact pentru orice $\lambda > 0$. Într-adevăr, fie $x \in B(0, r) = \{v \in H; \|v\| \leqslant r\}$ și $y = (I + \lambda A)^{-1}(x)$. Atunci $y = (I + \lambda_0 A)^{-1}(w)$, cu $w = (1 - \lambda_0/\lambda)y + (\lambda_0/\lambda)x$ și evident există $R > 0$ astfel încît $\|w\| \leqslant R$.

Deci $(I + \lambda A)^{-1} B(0, r) \subset (I + \lambda_0 A)^{-1} B(0, R)$, ceea ce demonstrează afirmația. Pentru a demonstra propoziția este suficient (conform Propoziției 2.4) să arătăm că pentru orice $x \in D(A)$ traiectoria $\{S(t)x; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă. Evident

$$S(t)x = (I + A)^{-1}(A^0(S(t)x) + S(t)x), \quad \forall t \geqslant 0.$$

În plus $\|A^0(S(t)x)\| \leqslant \|A^0 x\|$, $\forall t \geqslant 0$ și, întrucît $A^{-1}(0) \neq \emptyset$, conform Teoremei 1.1 $\|S(t)x\| \leqslant$ Const., $\forall t \geqslant 0$. Astfel, cum $(I + A)^{-1}$ este compact, rezultă că $\forall x \in D(A)$ mulțimea $\{S(t)x; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă. ∎

Următoarele două rezultate sînt condiții necesare și suficiente pentru ca rezolventa să fie operator compact.

Propoziția 2.6. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton. Atunci $J_1 = (I + A)^{-1}$ este compact dacă și numai dacă mulțimea $E_C = \{x \in D(A); \|x\| \leqslant C, \|y\| \leqslant C$ pentru orice $y \in A(x)\}$ este relativ compactă pentru orice $C > 0$.*

Demonstrație. Presupunem mai întîi că J_1 este compact. Atunci, deoarece evident $E_C \subset J_1 B(0, 2C)$, unde $B(0, 2C) = \{v \in H; \|v\| \leqslant 2C\}$, rezultă că E_C este o mulțime relativ compactă pentru orice $C > 0$. Invers, fie $B \subset H$ o mulțime mărginită și fie $x \in J_1 B$. Atunci $x \in D(A)$ și pentru orice $w \in A(x)$ există $y \in B$ astfel încît

$$x + w = y. \tag{2.11}$$

Fie $[x_0, w_0] \in A$ și $y_0 \in H$ astfel încît

$$x_0 + w_0 = y_0 \tag{2.12}$$

Scăzînd (2.12) din (2.11), luînd apoi produsul scalar cu $x - x_0$ și folosind monotonia operatorului A obținem $\|x - x_0\| \leqslant \|y - y_0\|$. Deoarece B este presupusă mărginită rezultă că $\|x\|$ este mărginită și conform cu (2.11) $\|w\|$ este mărginită.

Astfel există $C > 0$ astfel încît $\|x\| \leqslant C$, $\|w\| \leqslant C$, $\forall w \in A(x)$ și $J_1 B \subset E_C$. Astfel J_1 este operator compact. ∎

Propoziția 2.7. *Fie $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ o funcție proprie, convexă și semicontinuă inferior și fie $A = \partial\varphi$. Atunci $J_1 = (I + A)^{-1}$ este compact dacă și numai dacă mulțimea $K_C = \{x; \|x\| \leqslant C, \varphi(x) \leqslant C\}$ este compactă pentru orice $C > 0$.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Presupunem că mulțimea K_C este compactă pentru orice $C > 0$. Fie $x_0 \in D(\varphi)$ și $x \in E_C$, unde E_C este mulțimea din enunțul Propoziției 2.6. Atunci

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + (A^0(x),\ x - x_0) \leqslant \varphi(x_0) + \|A^0(x)\| \cdot \|x - x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(x_0) + C(\|x_0\| + C).$$

Prin urmare, există $C_1 > 0$ astfel încît $E_C \subset K_{C_1}$. Prin urmare E_C este relativ compactă pentru orice $C > 0$ deci, conform Propoziției 2.6, J_1 este operator compact. Invers, presupunem că J_1 este compact și fie $x \in K_C$. Atunci $\varphi(x) - \varphi(J_\lambda x) \geqslant (\partial\varphi_\lambda(x),\ x - J_\lambda x) = (1/\lambda)\ \|x - J_\lambda x\|^2$. Deoarece φ este minorată de o funcție afină inegalitatea de mai sus conduce la $(1/\lambda)\|x - J_\lambda x\|^2 \leqslant C + C_1\|x - J_\lambda x\| + C_2$. Deci, există constantele C_3 și C_4 astfel încît $\|\ x - J_\lambda x\ \| \leqslant \sqrt{\lambda(C_3\lambda + C_4)}$, $\forall \lambda > 0$.

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\lambda(\varepsilon) > 0$ astfel încît $\|x - J_{\lambda(\varepsilon)}x\| < \varepsilon/3$, $\forall x \in K_C$.

Deoarece J_1 este compact rezultă că J_λ este compact pentru orice $\lambda > 0$ (vezi demonstrația propoziției 2.5). Deci $J_{\lambda(\varepsilon)}K_C$ este o mulțime compactă. Fie $\{y_i;\ y_i = J_{\lambda(\varepsilon)}x_i,\ x_i \in K_C,\ i \in I\}$ o $\varepsilon/3$ -rețea finită pentru mulțimea $J_{\lambda(\varepsilon)}K_C$. Atunci mulțimea $\{x_i;\ i \in I\}$ este o ε-rețea pentru mulțimea K_C, fapt ce încheie demonstrația propoziției. ∎

Observația 2.2. Y. Konishi [1] a arătat că în cazul $B = \partial\varphi$ cu $0 \in R(B)$ operatorul $(I + B)^{-1}$ este compact dacă și numai dacă $(I + B^{1/2})^{-1}$ este compact, unde $B^{1/2}$ este rădăcina pătrată în sensul lui V. Barbu (vezi Observația 2.6, Cap. I). Drept consecință, în cazul subdiferențialei compactitatea rezolventei $(I + B)^{-1}$ implică, pentru orice $x \in \overline{D(B)}$, relativa compactitate a traiectoriei soluției $u(t)$, $t \geqslant 0$, pentru problema de ordinul doi (1.35). Deci, ținînd cont și de Teorema 1.6, (I_3), $\forall x \in \overline{D(B)}$, $u(t) \to p \in B^{-1}(0)$, pentru $t \to \infty$, în topologia tare (vezi, de asemenea, Propoziția 2.3).

Nu se știe dacă echivalența lui Y. Konishi se păstrează în cazul cînd B este maximal monoton arbitrar; Y. Konishi [1] a arătat doar că, în cazul general, $(I + B^{1/2})^{-1}$ compact implică $(I + B)^{-1}$ compact. Această implicație nu prezintă însă interes pentru considerațiile noastre. Totuși putem demonstra următorul rezultat care este complet satisfăcător în contextul de față.

Teorema 2.2. *Fie* $B : D(B) \subset H \to H$ *maximal monoton cu* $B^{-1}(0) \neq \emptyset$ *și* $(I + B)^{-1}$ *compact. Atunci, pentru orice* $x \in \overline{D(B)}$, *soluția* $u(t)$, $t \geqslant 0$, *a problemei* (1.35) *converge tare, cînd* $t \to \infty$, *la un element din* $B^{-1}(0)$.

Demonstrație. Avînd în vedere Teorema 1.6, (I_3) și Propoziția 2.3 de la începutul acestei secțiuni este suficient să arătăm că pentru orice $x \in \overline{D(B)}$, există $t_n \to \infty$ astfel încît $u(t_n)$ converge tare, pentru $n \to \infty$.

Conform Teoremei 2.8 din Cap. I

$$(t^{3/2}\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t) \in L^2(\mathbf{R}_+;\ H). \tag{2.13}$$

Pe de altă parte din (1.35) deducem că

$$u(t) = (I + B)^{-1}\,(u(t) + (\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t)\,(t)),\ \text{a.p.t. } t > 0. \tag{2.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile (2.13) şi (2.14) şi proprietatea de a fi compact a lui $(I+B)^{-1}$ implică existenţa unui şir $t_n \to \infty$ încît $u(t_n)$ converge în topologia tare a lui H. ■

Rezultatul pe care-l expunem în continuare oferă o altă condiţie suficientă pentru ca $\omega(x)$ să fie nevidă.

Teorema 2.3. (A. Pazy). *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton. Presupunem că mulţimea $F = A^{-1}(0)$ conţine o bilă de codimensiune finită n (adică, există un subspaţiu afin închis F_n al lui H de codimensiune n astfel încît $F \cap F_n$ conţine o bilă de rază pozitivă). Atunci, pentru orice $x \in \overline{D(A)}$, $\omega(x) \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. Fie $B(x_0, \rho_0)$ bila (să zicem închisă) din enunţul teoremei. Dacă se notează cu H_n spaţiul liniar $F_n - x_0$, atunci $x_0 + \rho u \in F$ pentru toţi $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ şi pentru toţi $u \in H_n$ satisfăcînd $\|u\| \leqslant 1$.

Notăm cu $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}\,;\, t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Atunci, pentru fiecare $x \in \overline{D(A)}$, avem

$$\|S(t)\,x - x_0 - \rho u\|^2 \leqslant \|S(s)x - x_0 - \rho u\|^2, \text{ pentru } t \geqslant s \geqslant 0. \tag{2.15}$$

Prin urmare

$$(S(s)x - S(t)x,\, u) \leqslant (1/2\rho)\,(\|S(s)x - x_0\|^2 - \|S(t)x - x_0\|^2), \tag{2.16}$$

pentru $t \geqslant s \geqslant 0$, $0 < \rho \leqslant \rho_0$, $u \in H_n$, $\|u\| \leqslant 1$.

Notăm cu Π operatorul de proiecţie pe H_n care este liniar şi autoadjunct. Luînd în (2.16) $u = \|\Pi(S(s)x - S(t)\,x\|^{-1}\,\Pi(S(s)x - S(t)x)$ se deduce că $\{\Pi\,(S(t)x)\,;\, t \geqslant 0\}$ este un şir Cauchy, deoarece aplicaţia $t \mapsto \|S(t)x - x_0\|$ este descrescătoare (vezi (2.15) cu $\rho = 0$). Deci există $v \in H$ astfel încît

$$\Pi(S(t)x) \to v, \text{ pentru } t \to \infty, \text{ tare în } H. \tag{2.17}$$

Dar $S(t)x = \Pi(S(t)x) + (I - \Pi)(S(t)x)$. Deoarece $F \neq \emptyset$ mulţimea $\{S(t)x\,;t \geqslant 0\}$ este mărginită, conform Teoremei 1.1. Prin urmare, mulţimea $\{(I - \Pi)\,(S(t)x)\,;\, t \geqslant 0\}$ este relativ compactă, fiind o mulţime mărginită într-un spaţiu finit dimensional. Deci, există $t_n \to \infty$ şi $w \in H$ astfel încît

$$(I - \Pi)\,(S(t_n)x) \to w, \text{ pentru } n \to \infty. \tag{2.18}$$

În concluzie, ţinînd cont de (2.17) şi (2.18), avem $S(t_n)x \to v + w$, pentru $n \to \infty$, adică $\omega(x) \neq \emptyset$. Teorema este astfel complet demonstrată. ■

Propoziţia 2.8. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton cu $\mathrm{Int}\,A^{-1}(0) \neq 0$. Atunci, $\forall x \in \overline{D(A)}$ există $v \in A^{-1}(0)$ astfel încît $S(t)x \to v$, pentru $t \to \infty$, tare în H.*

Demonstraţie. În acest caz spaţiul H_n din demonstraţia teoremei precedente coincide cu H iar operatorul de proiecţie coincide cu identitatea. Astfel, conform cu (2.17), $S(t)x \to v$, pentru $t \to \infty$, tare în H. Faptul că $v \in A^{-1}(0)$ este deja bine cunoscut (vezi, de exemplu, Teorema 1.4). ■

Corolarul 2.1 *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton şi fie A_λ, $\lambda > 0$, aproximanta sa Yosida. Dacă $A^{-1}(0)$ conţine o bilă de codimensiune finită, atunci $\forall x \in H$, $\forall \lambda > 0$ există $p \in A^{-1}(0)$ astfel încît $S_\lambda(t)x \to p$, pentru $t \to \infty$, unde $\{S_\lambda(t)\,;\, t \geqslant 0\}$ reprezintă semigrupul generat de $-A_\lambda$*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Evident $\forall \lambda > 0$, $A_\lambda^{-1}(0) = A^{-1}(0)$. Deci $\forall x \in H$ $\forall \lambda > 0$, mulțimea ω-limită asociată punctului x și semigrupului $\{S_\lambda(t)\,;\, t \geqslant 0\}$ este nevidă. Din Teorema 1.6, (I_2) rezultă că: $\forall x \in H$, $\forall \lambda > 0$, $\exists p \in A^{-1}(0)$ astfel încît $S_\lambda(t)x \to p$, cînd $t \to \infty$. Astfel Propoziția 2.3 încheie demonstrația corolarului.

Pentru cazurile $A = \partial\varphi$ și $A = B^{1/2}$ am văzut deja că imparitatea este o condiție suficientă pentru convergența tare (vezi Observația 2.1). În cazul subdiferențialei se cunoaște un rezultat mai puternic și anume

Teorema 2.4. *Presupunem că $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ este o funcție proprie, convexă și semicontinuă inferior. În plus, $D(\varphi) = -D(\varphi)$ și există un număr $\alpha > 0$ astfel încît*

$$\varphi(x) - \varphi(0) \geqslant \alpha(\varphi(-x) - \varphi(0)), \quad \forall x \in D(\varphi). \tag{2.19}$$

Se notează cu $\{S(t)\,;\, t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$, unde $A = \partial\varphi$. Atunci, pentru orice $x \in \overline{D(\varphi)}$, $S(t)x$ converge tare, pentru $t \to \infty$, la un $p \in A^{-1}(0)$ (altfel spus p este un punct de minim pentru φ).

Observația 2.3. Dacă φ este convexă și îndeplinește proprietatea (2.19) cu $\alpha > 1$, atunci în mod necesar φ este constantă pe $D(\varphi)$. Într-adevăr, din (2.19) obținem $\varphi(x) - \varphi(0) \geqslant \alpha^2(\varphi(x) - \varphi(0))$, $\forall x \in D(\varphi)$ ceea ce implică $\varphi(x) \leqslant \varphi(0)$, $\forall x \in D(\varphi)$. Presupunem acum că ar exista cel puțin un $y \in D(\varphi)$, $y \neq 0$, astfel încît $\varphi(y) < \varphi(0)$. Atunci $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{y+(-y)}{2}\right)$ $\leqslant (1/2)\,(\varphi(y) + \varphi(-y)) < \varphi(0)$ ceea ce este absurd. Deci $\varphi(x) = \varphi(0)$, $\forall x \in D(\varphi)$, adică tocmai ce doream să arătăm.

Dacă (2.19) este îndeplinită cu $\alpha = 1$, atunci evident φ este o funcție pară.

Dar există funcții, chiar convexe și oricît de regulate, care satisfac (2.19) cu niște $\alpha \in]\,0,1[$ dar care nu sînt pare. De exemplu, funcția $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \text{ pentru} & x \geqslant 0 \\ (2/3)x^2 \text{ pentru} & x < 0 \end{cases}$$

satisface (2.19) cu $\alpha = 1/2$, dar nu este pară.

Notă bibliografică. Teorema 2.4 este o generalizare dată de H. Okochi [1] a rezultatului obținut anterior de R. E. Bruck [2], în cazul cînd φ este funcție pară.

Demonstrația Teoremei 2.4. Conform Observațiilor 2.1 și 2.3 este suficient să ne restrîngem la cazul $0 < \alpha < 1$. Mai mult, presupunem fără a restrînge generalitatea că $\varphi(0) = 0$, deoarece $\partial\varphi = \partial(\varphi + \text{Const.})$. Atunci, pentru orice $x \in D(\varphi)$,

$$\varphi(0) = \varphi\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}x + \frac{1}{1+\alpha}(-\alpha x)\right) \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi(x) + \frac{1}{1+\alpha}\varphi(-\alpha x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi(x) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi(-x) \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi(x) + \frac{1}{1+\alpha}\varphi(x) = \varphi(x).$$

Deci 0 este punct de minim pentru φ sau $0 \in A^{-1}(0)$. Fixăm $x \in \overline{D(\varphi)}$ și notăm $u(t) = S(t)x$, $t \geqslant 0$. Atunci, funcția $t \mapsto \varphi(u(t))$ este descrescătoare

Scanned with OKEN Scanner

pe $]0, +\infty[$, deoarece $\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = \left(\frac{du}{dt}(t), A^\circ(u(t))\right) = -\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 \leqslant$ $\leqslant 0$, a.p.t. $t > 0$. Astfel, folosind (2.19) și definiția subdiferențialei se obține

$$\varphi(u(t)) \geqslant \varphi(u(t')) \geqslant \alpha\varphi(-u(t')) \geqslant \varphi(-\alpha u(t')) \geqslant \tag{2.20}$$

$$\geqslant \varphi(u(t)) + ((du/dt\,(t),\ \alpha\, u(t') + u(t)),\ \text{a.p.t. } t \in\ ]\,0,\ t'[.$$

Să fixăm pentru moment $t' > 0$. Definim funcția $g : [0,\ t'] \mapsto \mathbf{R}$ prin

$$g(t) = \frac{1+\alpha}{2}\,(\|u(t)\|^2 - u(t')\|^2) - \frac{\alpha}{2}\,\|u(t) - u(t')\|^2.$$

Evident g este absolut continuă, întrucît u este absolut continuă și $g(t') = 0$. Mai mult, conform cu (2.20)

$$\frac{dg}{dt}(t) = \left(\frac{du}{dt}(t),\ \alpha u(t') + u(t)\right) \leqslant 0,\ \text{a.p.t. } t \in\ ]0,\ t'[.$$

Prin urmare $g(t) \geqslant g(t') = 0$, pentru $t \in\ ]0,\ t'[$, adică

$$\frac{1+\alpha}{2}\,(\|u(t)\|^2 - \|u(t')\|^2) \geqslant \frac{\alpha}{2}\,\|u(t) - u(t')\|^2, \quad \text{pentru } t \in\ ]\,0,\ t'[.$$

Ultima inegalitate arată în primul rînd că funcția $t \mapsto \|u(t)\|^2$ este descrescătoare, ceea ce nu este o noutate întrucît $0 \in A^{-1}(0)$, apoi că $u(t)$ are limită în topologia tare, pentru $t \to \infty$, limită care se cunoaște că aparține mulțimii $A^{-1}(0)$. ■

Teorema 2.5. (A. Pazy). *Presupunem că $A : D(A) \subset H \to H$ este maximal monoton impar și, în plus, semigrupul $\{S(t);\, t \geqslant 0\}$ generat de $-A$ satisface condiția*

$$\forall x \in D(A),\ \lim_{t\to\infty} A^\circ(S(t)x) = 0; \tag{2.21}$$

Atunci, $\forall x \in \overline{D(A)}$, există $p \in A^{-1}(0)$ astfel încît

$$\lim_{t\to\infty} S(t)x = p, \text{ în topologia tare a lui } H. \tag{2.22}$$

Observația 2.4. Evident teorema acoperă situațiile deja cunoscute cînd A este subdiferențială sau rădăcină pătrată, A avînd în plus proprietatea de a fi impar.

Demonstrația Teoremei 2.5. Fie $x \in D(A)$. După cum am remarcat încă în demonstrația Teoremei 1.6, $0 \in D(A)$ și $A^\circ(0) = 0$ deci $A^{-1}(0)$ este nevidă, ea conținînd măcar elementul nul. Mai remarcăm că ipoteza (2.21) implică $\omega_u(x) \subset A^{-1}(0)$. Astfel, conform Teoremei 1.4, există $p \in A^{-1}(0)$ astfel încît $S(t)x \to p$, pentru $t \to \infty$. Ceea ce trebuie arătat în plus este convergența tare. Deoarece $0 \in A^{-1}(0)$ există $d \geqslant 0$ astfel încît $\|S(t)x\| \to d$, pentru $t \to \infty$. De asemenea, este ușor de văzut că funcțiile $t \mapsto \|S(t)x \pm \pm S(t+s)x\|$ sînt descrescătoare pe $[0, \infty[$ pentru orice $s \geqslant 0$, deci ambele funcții admit limite finite pentru $t \to \infty$.

Mai mult, deoarece

$$\|S(t)x - S(t+s)x\| = \left\|\int_0^s A^0(S(t+r)x)dr\right\| \leqslant$$

$$\leqslant s\|(A^0 S(t)x)\|,\ \forall t \geqslant 0,\ s \geqslant 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă în virtutea ipotezei (2.21) că

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)x - S(t+s)x\| = 0, \ \forall s \geqslant 0.$$

Drept consecință,

$$2d = 2 \lim_{t\to\infty} \|S(t)x\| \leqslant \lim_{t\to\infty} \|S(t)x + S(t+s)x\| + \tag{2.23}$$

$$+ \lim_{t\to\infty} \|S(t)x - S(t+s)x\| = \lim_{t\to\infty} \|S(t)x + S(t+s)x\|.$$

Ținînd seama de faptul că $t \mapsto \|S(t)x + S(t+s)x\|$ este o funcție descrescătoare pentru fiecare $s \geqslant 0$, relația (2.23) implică

$$2d \leqslant \|S(t)x + S(t+s)x\|, \quad \forall t,s \geqslant 0.$$

Prin urmare,

$$\|S(t+s)x - S(t)x\|^2 = 2\|S(t)x\|^2 + 2\|S(t+x)\|^2 -$$

$$- \|S(t+s)x + S(t)x\|^2 \leqslant 4\|S(t)x\|^2 - 4d^2, \quad \forall t,x \geqslant 0.$$

Deci pentru orice $x \in D(A)$, $S(t)x$ converge tare pentru $t \to \infty$. Rezultatul se extinde pentru toți $x \in \overline{D(A)}$, conform Propoziției 2.4. ∎

Observația 2.5 Dacă A este maximal monoton astfel încît $A^{-1}(0)$ este nevidă și semigrupul generat de $-A$ satisface condiția (2.21), atunci, cum am remarcat deja mai sus, $\omega_w(x) \subset A^{-1}(0)$, deci (2.22) are loc în topologia slabă, $\forall x \in D(A)$. Printr-un argument obișnuit de densitate urmează că (2.22) are loc în topologia slabă, $\forall x \in \overline{D(A)}$.

În altă ordine de idei, reamintim că, în virtutea Teoremei 1.3, toate rezultatele de convergență stabilite pentru traiectoriile semigrupului generat de un operator maximal monoton rămîn adevărate pentru soluțiile slabe ale ecuației (E), unde $f \in L^1(\mathbf{R}_+;H)$. Anumite condiții suplimentare impuse operatorului A permit obținerea de rezultate de convergență tare a soluțiilor și în alte condiții impuse termenului neomogen f. Ca exemplu, să dăm acum

Teorema 2.6. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator maximal monoton care, în plus, este tare monoton, adică există $a > 0$ astfel încît*

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geqslant a\|x_1 - x_2\|^2, \ \forall [x_1, y_1]\ [x_2, y_2] \in A. \tag{2.24}$$

Mai presupunem că $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+; H)$ și $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Fie p unica soluție a ecuației $0 \in A(u)$. Atunci $z(t) \to p$, tare în H, pentru $t \to \infty$, unde $z(t)$, $t \geqslant 0$, este o soluție slabă oarecare a ecuației (E). *Mai precis*

$$\|z(t) - p\| \leqslant e^{-at}\|z(0) - p\| + \int_0^t e^{a(s-t)}\|f(s)\|\,ds, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.25}$$

Demonstrație. Presupunem pentru moment că $z(t)$, $t \geqslant 0$, este soluție tare pentru (E). Înmulțind scalar ecuația (E) cu $z(t) - p$ se obține, ținînd seama și de (2.24), $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|z(t) - p\|^2\right) + a\|z(t) - p\|^2 \leqslant \|f(t)\| \cdot \|z(t) -$

Scanned with OKEN Scanner

$-p\|$, a.p.t. $t>0$ şi de aici $\frac{1}{2}e^{2at}\|z(t)-p\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|z(0)-p\|^2 +$ $+\int_0^t e^{2as}\|z(s)-p\|\cdot\|f(s)\|\,ds$, $\forall t \geqslant 0$.

Aplicînd acum Lema 2.1 din Cap. I se obţine $e^{at}\|z(t)-p\| \leqslant \|z(0)-p\| +$ $+\int_0^t e^{as}\|f(s)\|ds$, $\forall t \geqslant 0$ adică tocmai (2.25). Evident (2.25) se poate extinde pentru orice soluţie slabă $z(t)$. Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Notă bibliografică. Rezultatele expuse în Secţiunile 2.1 şi 2.2 pentru care nu au fost făcute trimiteri bibliografice sînt fie originale fie prelucrări ale unui material bibliografic numeros, menţionînd în mod special ucerările lui A. Haraux [2] şi A. Pazy [3].

2.3. Proprietăţile mulţimilor ω-limită

Fie C o submulţime nevidă închisă în spaţiul Hilbert real H şi fie $\{S(t); C \to C;\ t \geqslant 0\}$ un semigrup continuu de contracţii. Notăm $\gamma(x) = \{S(t)x;\ t \geqslant 0\}$, $x \in C$ (*traiectoria* sau *orbita* prin x a semigrupului). Amintim că $\omega(x)$ definită la (1.22) se numeşte *mulţimea ω-limită* corespunzătoare punctului x. Evident $\omega(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma(S(t)x)}$.

Începem această secţiune cu următorul rezultat care are loc chiar în spaţii Banach generale.

Teorema 2.7. *Fie C o submulţime nevidă închisă a lui H şi $\{S(t): C \to C;\ t \geqslant 0\}$ un semigrup de contracţii. Presupunem că pentru un $x \in C$, $\omega(x) \neq \emptyset$. Atunci*

1°. $\omega(x) = \overline{\gamma(y)}$, $\forall y \in \omega(x)$;

2°. *pentru fiecare $t \geqslant 0$, $S(t)$ este un homeomorfism izometric al lui $\omega(x)$ pe $\omega(x)$, astfel încît $\{S(t): \omega(x) \to \omega(x);\ t \geqslant 0\}$ poate fi extins ca un grup continuu pe $\omega(x)$;*

3° *Dacă $a \in C$ este un punct fix (punct de echilibru) pentru $\{S(t): C \to C;\ t \geqslant 0\}$, atunci $\omega(x)$ este conţinută în sfera $\{y;\ \|y-a\| = r\}$, unde $r \leqslant \|x-a\|$.*

4°. *Dacă $\omega(x)$ este compactă, atunci funcţiile $t \in \mathbf{R} \mapsto S(t)y$, $y \in \omega(x)$ sînt echiaproape periodice, adică: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists l_\varepsilon > 0$ astfel încît orice interval real de lungime l_ε conţine un punct τ cu proprietatea $\|S(t+\tau)y - S(t)y\| \leqslant \varepsilon$ $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall y \in \omega(x)$; mai mult, există $y_0 \in \omega(x)$ astfel încît*

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)x - S(t)y_0\| = 0. \tag{2.26}$$

Demonstraţie. 1°. Fixăm $y \in \omega(x)$, adică există $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)x \to y$. Pentru orice $t \geqslant 0$, $S(t)y = \lim_{n\to\infty} S(t+t_n)x \in \omega(x)$ adică $\overline{\gamma(y)} \subset \overline{\omega(x)}$. Însă $\omega(x)$ este o mulţime închisă deoarece $\omega(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma(S(t)x)}$.

Prin urmare

$$\overline{\gamma(y)} \subset \omega(x). \tag{2.27}$$

Fie acum $z \in \omega(x)$, adică există $\tau_n \to \infty$ astfel încît $S(\tau_n)x \to z$. Fără a restrînge generalitatea se poate presupune că $s_n = \tau_n - t_n \geqslant n$, pentru orice n natural. Atunci avem

$$\|S(s_n)y - z\| \leqslant \|S(s_n)y - S(s_n+t_n)x\| + \|S(\tau_n)x - z\| \leqslant$$
$$\leqslant \|y - S(t_n)x\| + \|S(\tau_n)x - z\| \to 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $z \in \omega(y)$, adică

$$\omega(x) \subset \omega(y) \subset \overline{\gamma(y)}. \tag{2.28}$$

Astfel proprietatea 1° rezultă din (2.27) și (2.28).

2°. Din raționamentul de mai sus rezultă în particular că $\omega(x) = \omega(y)$, $\forall y \in \omega(x)$. Prin urmare, pentru fiecare $y \in \omega(x)$ există șirul $\sigma_n \to \infty$ astfel încît $S(\sigma_n)y \to y$. Vom arăta că șirul $\{\sigma_n\}$ cu această proprietate este același pentru toți $z \in \omega(x)$, adică

$$S(\sigma_n)z \to z, \ \forall z \in \omega(x). \tag{2.29}$$

Ca la punctul 1° se poate alege $s_n \to \infty$ astfel încît $S(s_n)y \to z$. Atunci avem

$$\|S(\sigma_n)z - z\| \leqslant \|S(\sigma_n)\, z - S(\sigma_n + s_n)y\| + \|S(\sigma_n + s_n)y - S(s_n)y\| +$$

$$+ \|S(s_n)y - z\| \leqslant 2\|\, z - S(s_n)y\| + \|S(\sigma_n)y - y\| \to 0.$$

Astfel (2.29) este dovedită. Mai departe, pentru $t \geqslant 0$, $\|y - z\| \geqslant \|S(t)y - S(t)\, z\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \|S(\sigma_n)y - S(\sigma_n)z\| = \|y - z\|$ ceea ce arată că pentru fiecare $t \geqslant 0$ $S(t)$ este o izometrie pe $\omega(x)$. În particular, $S(t) : \omega(x) \to \omega(x)$ este o aplicație injectivă. Pentru a încheia demonstrația punctului 2° este suficient să arătăm că pentru fiecare $t > 0$, $S(t)$ este o aplicație surjectivă. Pentru aceasta fixăm $z \in \omega(x)$. Pentru m, n, k suficient de mari se poate scrie

$$\|S(\sigma_n - t)z - S(\sigma_m - t)z\| \leqslant \|S(\sigma_n - t)z - S(\sigma_n + \sigma_k - t)z\| + \tag{2.30}$$

$$+ \|S(\sigma_n + \sigma_k - t)\, z - S(\sigma_m + \sigma_k - t)z\| + \|S(\sigma_m + \sigma_k - t)z -$$

$$- S(\sigma_m - t)z\| \leqslant 2\|\, S(\sigma_k)z - z\| + \|S\,(\sigma_n + \sigma_k - t)z -$$

$$- S(\sigma_m + \sigma_k - t)z\|.$$

Am presupus că $\sigma_k \to \infty$ este șirul pentru care $S(\sigma_k)\, z \to z$. Evident, pentru k fixat șirul $\{S(\sigma_n + \sigma_k - t)z\}$ este convergent (cu limita $S(\sigma_k - t)z$). Rezultă atunci din (2.30) că $\{S(\sigma_n - t)z\}$ este Cauchy. Notăm cu y limita acestuia. Atunci este clar că $S(t)y = z$, deci $S(t)$ este o aplicație surjectivă, adică tocmai ceea ce doream să arătăm.

3°. Dacă a este punct fix pentru $\{S(t)\,; t \geqslant 0\}$, atunci evident funcția $t \mapsto \|S(t)x - a\|$ este descrescătoare și deci converge, pentru $t \to \infty$, la o limită r cu $0 \leqslant r \leqslant \|x - a\|$. Fie $y \in \omega(x)$, adică există $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)x \to y$. Atunci $\|y - a\| = \lim_{n\to\infty} \|S(t_n)\, x - a\| = \lim_{t\to\infty} \|S(t)x - a\| = r$. Astfel 3° este dovedită.

4°. Presupunem așadar că $\omega(x)$ este nevidă și compactă. Fie $y \in \omega(x)$. Să arătăm că funcția $S(\cdot)y : \mathbf{R} \to \omega(x)$ este aproape periodică. Pentru aceasta fie $\{t_n\}$ un șir oarecare de numere reale. Deoarece $\{S(t_n)y\} \subset \omega(x)$ și $\omega(x)$ este compactă rezultă că există subșirul $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ astfel încît subșirul $\{S(t_{n_k})y\}$ este tare convergent. După proprietatea 2° rezultă că șirul $\{S(t + t_{n_k})y\}$ este șir Cauchy, uniform în raport cu $t \in \mathbf{R}$. Dar acest fapt ne spune tocmai că funcția $t \mapsto S(t)y$ este Bochner aproape periodică deci, echivalent, ea este Bohr aproape periodică, adică : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists l_\varepsilon > 0$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît orice interval real de lungime l_ε conține un punct τ cu proprietatea

$$\|S(t+\tau)y - S(t)y\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2.31}$$

(În ceea ce privește funcțiile aproape periodice recomandăm cartea semnată de L. Amerio și G. Prouse [1]).

Pe de altă parte folosind 1° și 2° putem scrie că $\forall z \in \omega(x)$, $\|S(t+\tau)z - S(t)z\| = \|S(t+\tau)y - S(t)y\|$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Astfel (2.31) are loc pentru orice $t \in \mathbf{R}$ și orice $z \in \omega(x)$. Rămîne de demonstrat (2.26). Pentru aceasta fie $y \in \omega(x)$ și $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)x \to y$. Deoarece $\{S(-t_n)y\}$ este conținut în mulțimea compactă $\omega(x)$ urmează că există subșirul $t_{n_k} \to \infty$ pentru care $S(-t_{n_k})y$ converge, să zicem la $y_0 \in \omega(x)$. Atunci

$$\|S(t_{n_k})x - S(t_{n_k})y_0\| \leqslant \|S(t_{n_k})x - y\| + \|y - S(t_{n_k})y_0\| =$$
$$= \|S(t_{n_k})x - y\| + \|S(-t_{n_k})y - y_0\| \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{2.32}$$

Deoarece funcția $t \mapsto \|S(t)x - S(t)y_0\|$ este descrescătoare pe $[0, +\infty[$ rezultă că ea are limită pentru $t \to \infty$ și, datorită relației (2.32), această limită trebuie să fie zero. Astfel teorema este acum complet demonstrată. ■

Revenind la cadrul hilbertian, Teorema 2.7 poate fi completată cu alte informații privitoare la mulțimile ω-limită, așa cum reiese din

Teorema 2.8. *Presupunem că $A : D(A) \subset H \to H$ este maximal monoton și fie $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}\,;\, t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Mai presupunem că pentru orice $x \in \overline{D(A)}$ orbita $\gamma(x)$ este relativ compactă. Atunci*

(i) *$\forall x \in \overline{D(A)}$, $\omega(x)$ este o mulțime nevidă și compactă;*

(ii) *mulțimea $K = \bigcup_{x \in \overline{D(A)}} \omega(x)$ este închisă și convexă;*

(iii) *pentru fiecare $t \geqslant 0$, $S(t)$ este un homeomorfism al lui K pe K astfel încît $\{S(t) : K \to K\,;\, t \geqslant 0\}$ se poate extinde ca un grup continuu pe K; mai mult, există un grup afin de izometrii $\{T(t)\,;\, t \in \mathbf{R}\}$, definit pe subspațiul afin închis generat de K, grup care coincide cu $\{S(t)\,;\, t \in \mathbf{R}\}$ pe K; în plus, dacă se notează cu $-\hat{A}$ generatorul grupului $\{T(t)\,;\, t \in \mathbf{R}\}$, atunci*

$$D(\hat{A}) \cap K = D(A) \cap K \subset \{x \in D(A)\,;\, (A^0(x),\ x - a) = 0, \quad \forall a \in A^{-1}(0)\}$$

și

$$\forall x \in D(A) \cap K, \quad \hat{A}(x) = A^0(x)\,;$$

(iv) *pentru orice $x \in D(A)$, $\overline{\text{co}\ \omega(x)} \subset \{p \in D(A)\,;\, \|A^0(p)\| \leqslant \|A^0(x)\|\}$.*

Demonstrație. Proprietatea 1° menționată în Teorema 2.7 și faptul că $\overline{\gamma(x)}$ este compactă, $\forall x \in \overline{D(A)}$ implică imediat (i). Pentru a demonstra (ii) să arătăm mai întîi că mulțimea K este închisă. Pentru aceasta fie șirul $\{u_n\} \subset K$ cu $u_n \to u$. Am văzut în demonstrația Teoremei 2.7 că elementele v ale mulțimii K sînt caracterizate prin proprietatea $v \in \omega(v)$. Prin urmare există șirul $t_n \to \infty$ astfel încît $\|u_n - S(t_n)u_n\| < 1/n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Atunci $\|S(t_n)u - u\| < 2\|u_n - u\| + 1/n \to 0$, pentru $n \to \infty$. Deci $u \in K$, ceea ce arată că mulțimea K este închisă. Astfel pentru a demonstra că mulțimea K este convexă este suficient să arătăm că $u_1 \in K$ și $u_2 \in K \Rightarrow (1/2)(u_1 + u_2) \in K$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie aşadar şirurile $r_n \to \infty$ şi $s_n \to \infty$, şi elementele $z_1, z_2 \in \overline{D(A)}$ astfel încît $S(r_n)z_1 \to u_1$ şi $S(s_n)z_2 \to u_2$. Se poate presupune, eventual extrăgînd nişte subşiruri, că $\tau_n = r_{n+1} - r_n \to \infty$, $s_n \geqslant r_n$, $\forall n$ şi $S(s_n - r_n)z_2 \to z_3$.

Ultima relaţie implică

$$S(r_n)z_3 \to u_2. \tag{2.33}$$

Deoarece $\|S(\tau_n)u_1 - u_1\| \leqslant \|S(\tau_n)u_1 - S(\tau_n)\,S(r_{n+1})z_1\| + \|S(r_n)\,z_1 - u_1\| \leqslant \|S(r_n)z_1 - u_1\| + \|S(r_{n+1})z_1 - u_1\|$ obţinem că $S(\tau_n)u_1 \to u_1$ şi, în mod analog, ţinînd cont de (2.33), $S(\tau_n)u_2 \to u_2$. Astfel, deoarece pentru fiecare $t \geqslant 0$, $\|S(\tau_n)u_1 - S(\tau_n)u_2\| \leqslant \|S(t)u_1 - S(t)u_2\| \leqslant \|u_1 - u_2\|$, pentru n suficient de mare, este limpede că

$$\|S(t)u_1 - S(t)u_2\| = \|u_1 - u_2\|, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.34}$$

Dar

$$\left\| S(t)u_1 - S(t)\,\frac{u_1 + u_2}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2}\,\|u_1 + u_2\| \quad \forall t \geqslant 0 \text{ şi}$$

$$\left\| S(t)u_2 - S(t)\,\frac{u_1 + u_2}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2}\,\|u_1 - u_2\|, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.35}$$

Întrucît $\|S(t)u_1 - S(t)u_2\| \leqslant \left\| S(t)u_1 - S(t)\,\frac{u_1 + u_2}{2} \right\| + \left\| S(t)\,\frac{u_1 + u_2}{2} - \right.$

$\left. \right\|$, $\forall t \geqslant 0$ se obţine imediat folosind (2.34) şi (2.35) (2.35)

$$\left\| S(t)u_1 - S(t)\,\frac{u_1 + u_2}{2} \right\| = \left\| S(t)u_2 - S(t)\,\frac{u_1 + u_2}{2} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\,\|S(t)u_1 - S(t)u_2\|, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Datorită faptului că H este spaţiu Hilbert, deci strict convex, această ultimă relaţie implică (vezi, de ex., I. Ciorănescu [1, p. 47])

$$S(t)\,\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{1}{2}\,(S(t)u_1 + S(t)\,u_2), \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.36}$$

Prin urmare $\dfrac{u_1 + u_2}{2} = \lim\limits_{n \to \infty} S(\tau_n)\,\dfrac{u_1 + u_2}{2} \in K$, adică mulţimea K este într-adevăr convexă. Să demonstrăm acum (iii). Ţinînd cont de proprietatea 2° din Teorema 2.7 rezultă că pentru orice $t \geqslant 0$, $S(t) : K \to K$ este o aplicaţie surjectivă. Avînd în vedere şi relaţia (2.34) demonstrată deja mai sus deducem că pentru fiecare $t \geqslant 0$, $S(t) : K \to K$ este un homeomorfism izometric, deci semigrupul $\{S(t) : K \to K\,;\ t \geqslant 0\}$ se poate extinde ca un grup continuu pe K.

Să notăm acum cu L subspaţiul afin închis generat de K. Deoarece pentru orice $x \in \overline{D(A)}$ orbita $\gamma(x)$ este relativ compactă mulţimea $A^{-1}(0)$ este nevidă, conform Teoremei 1.1. Fie $a \in A^{-1}(0)$. Evident $a \in K$ deci mulţimea $X = L - a$ este subspaţiu liniar închis. Considerăm semigrupul

$\{\tilde{S}(t)\,;\,t \geqslant 0\}$ generat de $-\tilde{A}$, unde $\tilde{A}$ se definește prin $\tilde{A}(y) = A(y+a)$, $\forall y \in D(A) = D(\tilde{A}) - a$. Deci $\tilde{S}(t)y = S(t)(y+a) - a$, $\forall t \geqslant 0$, $\forall y \in \overline{D(\tilde{A})}$ și evident $0 \in \tilde{A}(0)$. Pentru un $t \in \mathbf{R}$ definim operatorul $\tilde{T}(t)$ mai întîi pe mulțimea combinațiilor liniare finite de elemente din $K - a$, în felul următor: dacă $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ cu $u_i \in K - a$ și $\lambda_i \in \mathbf{R}$, atunci $\tilde{T}(t)y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \tilde{S}(t)\, u_i$. Evident semigrupul $\{\tilde{S}(t) : K - a \to K - a\,;\, t \geqslant 0\}$ se extinde la un grup pe $K - a$ deoarece semigrupul original se extinde ca grup pe K.

Această definiție este independentă de descompunerea considerată pentru y. Într-adevăr, fie

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i u_i. \tag{2.37}$$

Se poate considera că elementele u_i sînt aceleași în ambele descompuneri. De asemenea ne putem restrînge la cazul cînd $\lambda_i \geqslant 0$ și $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, datorită definiției operatorului $\tilde{T}(t)$. Avem de arătat că

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda \tilde{S}_i(t) u_i = \sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i \tilde{S}(t) u_i. \tag{2.38}$$

Presupunînd că $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i > 0$ relația de mai sus se mai scrie

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} \tilde{S}(t) u_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_i} \tilde{S}(t) u_i.$$

Întrucît $0 \in K - a$ și $\lambda \geqslant \max\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i\right)$ înseamnă că $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} u_i$ și $\sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\lambda}_i}{\lambda} u_i$ sînt combinații convexe de elemente din $K - a$.

Deoarece (2.36) se poate extinde pentru un număr arbitrar de puncte din K și la combinații convexe arbitrare, vom avea atunci

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} \tilde{S}(t)\, u_i = \tilde{S}(t) \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} u_i$$

și analog

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} \tilde{S}(t)\, u_i = \tilde{S}(t) \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\lambda}_i}{\lambda} u_i.$$

Prin urmare, conform cu (2.37), relația (2.38) este adevărată. Din definiție $\tilde{T}(t)$ este liniar pe subspațiul liniar închis generat de $K - a$. Evident $T\,t)$ este o izometrie pe $K - a$ deoarece $S(t)$ are această proprietate pe K. Deoarece pentru u și v arbitrari din $K - a$, avem $\left\|\tilde{T}(t)\left(\frac{u+v}{2}\right)\right\|^2 = \left\|\frac{1}{2}(\tilde{T}(t)u + \tilde{T}(t)v)\right\|^2 = \left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|^2$ se observă imediat că

$(\tilde{T}(t)u, \tilde{T}(t)v) = (u, v)$. Deci, pentru orice combinaţie liniară $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$, $u_i \in$ $\in K - a$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ se poate scrie

$$\|\tilde{T}(t)y\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{T}(t)u_i \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j (\tilde{T}(t)u_i, \tilde{T}(t)u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (u_i, u_j) =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \right\|^2 = \|y\|^2.$$

Este clar deci că familia $\{\tilde{T}(t)\,;\, t \in \mathbf{R}\}$ este un grup de izometrii liniare pe subspaţiul liniar generat de $K - a$ şi evident acest grup se poate extinde prin densitate la spaţiul liniar închis $X = L - a$. Atunci familia de operatori $\{T(t) : L \to L\,;\, t \in \mathbf{R}\}$, unde $T(t)x = \tilde{T}(t)\,(x - a) + a$, $\forall x \in L$, $t \in \mathbf{R}$, este un grup afin de izometrii care extinde grupul $\{S(t) : K \to K\,;$ $t \in \mathbf{R}\}$. Astfel este clar că $D(A) \cap K = D(\hat{A}) \cap K$ şi $A^0(x) = \hat{A}(x)$, $\forall x \in D(A) \cap K$, unde $-\hat{A}$ este generatorul grupului $\{T(t) : L \to L\,;\, t \in \mathbf{R}\}$. Pe de altă parte, deoarece pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$, $\tilde{T}(t)$ este o izometrie liniară pe X, avem

$$\|S(t)x - a\| = \|x - a\|, \quad \forall x \in K, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall a \in A^{-1}(0).$$

Luînd acum $x \in D(A) \cap K$, putem scrie că

$$0 = \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} \|S(t)x - a\|^2 = -2(A^0(S(t)x),\ S(t)x - a), \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall a \in A^{-1}(0).$$

Pentru $t = 0$ se obţine $(A^0(x),\ x - a) = 0$ şi cu aceasta punctul (iii) al teoremei este demonstrat.

Pentru a arăta (iv) să amintim că pentru $x \in D(A)$ avem

$$\|A^0(S(t)x)\| \leqslant \|A^0(x)\|, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2.39}$$

Fie $p \in \omega(x)$, adică există $t_n \to \infty$ astfel încît $S(t_n)x$ converge la p. Atunci (2.39) şi faptul că A este demiînchis implică $\|A^0(p)\| \leqslant \|A^0(x)\|$. Aşadar $\omega(x) \subset \{p \in D(A)\,;\, \|A^0(p)\| \leqslant \|A^0(x)\|\}$. Deoarece $\{S(t)\,; t \geqslant 0\}$ restrîns la K este afin urmează că mulţimea $\overline{\mathrm{co}}\ \omega(x) \subset D(A)$ şi A^0 este afin pe $\overline{\mathrm{co}}\ \omega(x)$. Astfel relaţia de mai sus se extinde la $\overline{\mathrm{co}}\ \omega(x) \subset \{p \in D(A)\,;\, \|A^0(p)\| \leqslant$ $\leqslant A^0(x)\|\}$.

Folosind acum din nou faptul că A este demiînchis se obţine (iv). Astfel teorema este complet demonstrată. ∎

Observaţia 2.6. Este evident că, pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$ şi pentru fiecare $x \in \overline{D(A)}$, $S(t)$ aplică mulţimea $\overline{\mathrm{co}}\ \omega(x) \subset K$ pe ea însăşi, restricţia lui $S(t)$ pe $\overline{\mathrm{co}}\ \omega(x)$ fiind desigur un homeomorfism izometric.

De asemenea, se vede uşor din demonstraţie că toate concluziile Teoremei 2.8 au loc într-un cadru mai general decît cel hilbertian. Astfel, dacă $C \subset H$ este o mulţime închisă şi $\{S(t) : C \to C\,;\, t \geqslant 0\}$ este un semigrup de contracţii dat avînd orbitele relativ compacte, atunci (i) are loc pentru H spaţiu Banach general; de asemenea, faptul că mulţimea K este închisă are loc pentru H spaţiu Banach general; faptul că mulţimea K este convexă rezultă pentru H spaţiu Banach strict convex şi C (închisă şi) convexă, ş.a.m.d. Cititorul interesat va putea stabili cu uşurinţă cadrul cel mai general în care are loc fiecare din celelalte concluzii ale teoremei.

Scanned with OKEN Scanner

Corolarul 2.2. *Fie* $A : D(A) \subset H \to H$ *maximal monoton satisfăcînd proprietatea că există* $a^* \in A^{-1}(0)$ *astfel încît*

$$(A^0(x),\ x - a^*) = 0 \Rightarrow x \in A^{-1}(0). \tag{2.40}$$

Se notează cu $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}\ ;\ t \geqslant 0\}$ *semigrupul generat de* $-A$ *şi se presupune că pentru orice* $x \in \overline{D(A)}$ *orbita semigrupului,* $\gamma(x)$, *este relativ compactă. Atunci,* $\forall x \in \overline{D(A)}$, $S(t)x$ *converge tare la un element din* $A^{-1}(0)$.

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 2.4 este suficient să demonstrăm corolarul pentru toţi $x \in D(A)$. Ţinîndu-se cont de proprietăţile (i), (iii) şi (iv) ale Teoremei 2.8 se deduce că, pentru $x \in D(A)$, $\omega(x)$ ese nevidă şi

$$\omega(x) \subset \{y \in D(A)\ ;\ (A^0(y),\ y - a) = 0,\ \ \forall a \in A^{-1}(0)\}.$$

Datorită condiţiei (2.40) ceastă ultimă relaţie implică $\omega(x) \subset A^{-1}(0)$. Deci, în virtutea Teoremei 1.4 şi Propoziţiei 2.3, $S(t)x$ are limită în topologia tare, pentru $t \to \infty$. ■

Observaţia 2.7. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator maximal monoton. Să notăm cu $u(t\ ;\ x, f)$, $t \geqslant 0$, soluţia slabă a ecuaţiei (E) corespunzătoare unei date iniţiale $x \in \overline{D(A)}$ şi funcţiei $f \in L^1(\mathbf{R}_+\ ;\ H)$. Vom nota $\omega(x,f) = \{p \in \overline{D(A)}\ ;$ există $t_n \to \infty$ astfel încît $u(t_n\ ;\ x, f) \to p\}$. Considerăm spaţiul produs $X = H \times L^1(\mathbf{R}_+\ ;\ H)$ înzestrat cu norma $\|(x, f)\|_X = \|x\| + \int_0^\infty \|f(t)\|\ \mathrm{d}t$, $\forall (x, f) \in X$. Evident X este un spaţiu Banach real. Fie acum $Q = \overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+\ ; H)$ şi $\{S(t) : \overline{(D)A} \to \overline{D(A)}\ ;\ t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Atunci pentru fiecare $t \geqslant 0$ definim familia de operatori $\{S_1(t) : Q \to Q\ ;\ t \geqslant 0\}$ prin $S_1(t)\ (x, f) = (u(t\ ;\ x, f), f_t)$, $\forall (x, f) \in Q$, unde $f_t(s) = f(t + s)$, a.p.t. $s \in \mathbf{R}_+$, $t \geqslant 0$.

Se verifică uşor că familia $\{S_1(t) : Q \to Q\ ;\ t \geqslant 0\}$ astfel introdusă este un semigrup continuu de contracţii. Din teorema de existenţă a soluţiilor pentru ecuaţia (E) (Teorema 2.1, Cap. I) rezultă că $\{S_1(t)\ ;\ t \geqslant 0\}$ este generat de un operator $-B$ dat prin

$$D(B) = D(A) \times W^{1,1}(\mathbf{R}_+\ ;\ H),$$

$$B(x, f) = (A(x) - f(0),\ -\dot{f}), \qquad \forall (x, f) \in D(B),$$

unde $\dot{f}(s) = (\mathrm{d}f/\mathrm{d}s)(s)$.

Evident $D(B)$ este o mulţime invariantă la $S_1(t)$, $\forall t \geqslant 0$. Să mai observăm că dacă $f \in L^1(\mathbf{R}_+\ ; H)$, atunci mulţimea $\{f_t\ ;\ t \geqslant 0\}$ este relativ compactă în $L^1(\mathbf{R}_+\ ;\ H)$. Aşadar este suficient să presupunem că $\{u(t\ ;\ x, f)\ ;\ t \geqslant 0\}$ este o mulţime relativ compactă în H pentru a rezulta că orbita prin $(x, f) \in Q$ a semigrupului $\{S_1(t)\ ; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă în X.

Notînd acum cu $\omega_1(x, f)$ mulţimea ω-limită a punctului (x, f) corespunzătoare semigrupului $\{S_1(t)\ ;\ t \geqslant 0\}$ este clar că avem $\omega_1(x, f) = \omega(x, f) \times \{0\}$. De asemenea $B^{-1}(0,0) = A^{-1}(0) \times \{0\}$, aceasta fiind mulţimea punctelor fixe ale semigrupului $\{S_1(t)\ ;\ t \geqslant 0\}$. După aceste consideraţii este uşor de văzut cum se adaptează rezultatele precedente ale acestei secţiuni la cazul mulţimilor ω-limită asociate soluţiilor ecuaţiei (E) cu $f \in L^1(\mathbf{R}_+\ ; H)$, mulţimi notate mai sus cu $\omega(x, f)$, $x \in \overline{D(A)}$. Aceste adaptări sînt înglobate în teorema care urmează alături de alte două proprietăţi interesante notate acolo cu (vj) şi (vjj). De fapt, Teorema 2.9 de mai jos

Scanned with OKEN Scanner

extinde rezultatele precedente conținute în Teoremele 2.7 și 2.8. Am preferat prezentarea gradată a acestor chestiuni pentru mai multă claritate în expunere.

Teorema 2.9. *Fie* $A : D(A) \subset H \to H$ *maximal monoton. Se notează cu* $u(t; x, f)$, $t \geqslant 0$, *soluția slabă a ecuației* (E) *asociată perechii* $(x,f) \in \overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+; H)$. *Presupunem că mulțimea* $\{u(t; x, f);\ t \geqslant 0\}$ *este relativ compactă,* $\forall (x,f) \in \overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+; H)$. *Se notează cu* $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)};\ t \geqslant 0\}$ *semigrupul generat de* $-A$ *și cu* $\gamma(x)$ *orbita acestuia printr-un* $x \in \overline{D(A)}$. *Atunci*

(j) $\forall (x, f) \in \overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+; H)$ *mulțimea* $\omega(x, f)$ *este nevidă și compactă și* $\omega(x, f) = \overline{\gamma(y)}$, $\forall y \in \omega(x, f)$;

(jj) *mulțimea* $\Omega = \bigcup_{\substack{x \in \overline{D(A)} \\ f \in L^1(\mathbf{R}_+; H)}} \omega(x, f)$ *este închisă și convexă;*

(jjj) *pentru fiecare* $t \geqslant 0$, $S(t)$ *este un homeomorfism izometric afin al mulțimii* Ω *pe ea însăși, deci semigrupul* $\{S(t) : \Omega \to \Omega;\ t \geqslant 0\}$ *se poate extinde ca grup pe* Ω; *mai precizăm că* $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall (x, f) \in \overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+; H)$ *operatorul* $S(t)$ *aplică mulțimea* $\omega(f,f)$ $\overline{(\text{co}\ \omega(x, f))}$ *pe* $\omega(x, f)$ *(respectiv pe* $\overline{\text{co}\ \omega(x, f)}$*). In particular, dacă* $a \in F = A^{-1}(0)$, *atunci fiecare mulțime* $\omega(x,f)$ *este conținută într-o sferă* $\{y;\ \|y - a\| = R\}$, *unde* $R \leqslant$ $\leqslant \|x - a\| + \int_0^\infty \|f(t)\|\, dt$. *De asemenea, avem*

$$D(A) \cap \Omega \subset \{x \in D(A);\ (A^0(x),\ x - a) = 0,\ \forall a \in F\}. \tag{2.41}$$

(jv) $\forall (x, f) \in \overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+; H)$ *funcțiile* $t \in \mathbf{R} \mapsto S(t)y$, $y_0 \in \omega(x, f)$ *sînt echiaproape periodice și există* $y_0 \in \omega(x, f)$ *astfel încît* $\lim_{t \to \infty} \|u(t; x, f) - S(t)\, y_0\| = 0$;

(v) $\forall (x, f) \in D(A) \times W^{1,1}(\mathbf{R}_+; H)$

$$\overline{\text{co}\ \omega(x, f)} \subset \{p \in D(A);\ \|A^0(p)\| \leqslant \|(A(x) - f(0))^0\| + \int_0^\infty \|f(s)\|\, ds.$$

(vj) $\forall (x, f) \in D(A) \times W^{1,1}(\mathbf{R}_+; H)$ *mulțimea* $A^0(\omega(x, f))$ *este compactă și este conținută într-o sferă cu centrul în origine.*

(vjj) *Fie* (x, f) *oarecare în* $\overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+; H)$.

Atunci mulțimea $F \cap \overline{\text{co}\ \omega(x, f)}$ *conține un element și numai unul să zicem* p *și* $p = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(\tau; x, f)\, d\tau = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)\, y\, d\tau =$ $= \lim_{t \to \infty} \text{Proi}_F\, u(t; x, f) = \lim_{t \to \infty} \text{Proi}_F\, S(t)\, y$, $\forall y \in \overline{\text{co}\ \omega.(x,f)}$.

Demonstrație. Ținînd cont de comentariile făcute în Observația 2.7 se obțin proprietățile (j) — (v). Să facem totuși cîteva precizări pentru ușurarea lecturii. Astfel, prin ipoteză toate orbitele semigrupului $\{S_1(t) : Q \to Q;\ t \geqslant 0\}$ sînt relativ compacte. Astfel (j) rezultă direct din Teorema 2.7, (1°) și Teorema 2.8, (i). Să observăm în continuare că mulțimea K care apare în Teorema 2.8 asociată acum semigrupului $\{S_1(t);\ t \geqslant 0\}$ capătă forma $K = \bigcup_{(x,f) \in Q} \omega_1(x, f) = \Omega \times \{0\}$ și evident $S_1(t)K =$ $= (S(t)\, \Omega) \times \{0\}$, $\forall t \geqslant 0$. Astfel, (jj) — (v) se obțin redemonstrînd sa

adaptînd proprietăţile 2°—4°, Teorema 2.7 şi (ii) — (iii), Teorema 2.8 la cazul semigrupului $\{S_1(t)\,;\ t \geqslant 0\}$. Lăsînd aceste chestiuni în seama cititorului să trecem la demonstraţia proprietăţii (vj). Fie aşadar $(x, f) \in$ $\in D(A) \times W^{1,1}(\mathbf{R}_+\,; H)$, deci conform cu (v), $\omega(x, f) \subset D(A)$. Fie $y,\ z \in$ $\in \overline{\omega(x,f)}$ şi să admitem că $\|A^0(y)\| \leqslant \|A^0(z)\|$. Deoarece conform cu (j) $\overline{\omega(x,f)} =$ $= \gamma(y)$, înseamnă că există un şir $\{t_n\} \subset [0, +\infty[$ astfel încît $z = \lim\limits_{n\to\infty} S(t_n)y$. Deoarece $\|A^0(S(t_n)y)\| \leqslant \|A^0(y)\|$, $\forall n$ natural, putem presupune fără a se restrînge generalitatea că $A^0(S(t_n)y) \rightharpoonup w$, cu $w \in A(z)$, întrucît A este demiînchis. În concluzie

$$\|A^0(z)\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A^0(S(t_n)y)\| \leqslant \|A^0(y)\| \leqslant \|A^0(z)\|,$$

deci $\|A^0(y)\| = \|A^0(z)\|$. Aşadar $A^0(\omega(x, f))$ este conţinută într-o sferă cu centrul în origine. Să arătăm acum compactitatea acestei mulţimi. Pentru aceasta fie şirul $\{q_n\} \subset A^0\ (\omega(x, f))$. să zicem $q_n = A^0(y_n)$, $y_n \in \omega(x, f)$, $\forall n$ natural.

Deoarece $\omega(x, f)$ este o mulţime compactă şi $\{q_n\}$ este mărginit urmează că există nişte subşiruri $y_{n_k} \to y \in \omega\ (x, f)$ şi $q_{n_k}\ q \to q$, pentru $k \to \infty$. Deoarece A este demiînchis $q \in A(y)$ şi $\|A^0(y)\| \leqslant \|q\| \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} \|q_{n_k}\| \leqslant$ $\leqslant \limsup\limits_{k\to\infty} \|q_{n_k}\| = \|A^0(y)\|$. Prin urmare $q = A^0(y)$ şi q_{n_k} converge tare la $q \in A^0(\omega(x, f))$. Astfel (vj) este demonstrată. Să demonstrăm în continuare (vjj). Întrucît $\forall t \in \mathbf{R} (S(t)\ \overline{\text{co}\ \omega(x, f)} = \overline{\text{co}\ \omega(x, f)}$ este evident că

$$(2.42)\quad \sigma(t)y = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)y\ \mathrm{d}\tau \in \overline{\text{co}\ \omega(x, f)},\ \forall y \in \overline{\text{co}\ \omega(x, f)},\ \forall t > 0.$$

Dar, cum $A^{-1}(0)$ este nevidă (vezi Observaţia 1.2), rezultă, conform Teoremei 1.2, că $\forall x \in \overline{D(A)}$, există $q \in A^{-1}(0)$ astfel încît $\sigma(t)x \to q$, pentru $t \to \infty$. Astfel din (2.42) rezultă că $A^{-1}(0) \cap \overline{\text{co}\ \omega(x, f)} \neq \emptyset$. Am folosit faptul că mulţimea co $\overline{\omega(x, f)}$ este slab închisă, proprietate care rezultă din faptul că ea este convexă şi închisă. Să fixăm acum $y_0 \in \omega(x, f)$ şi $p \in A^{-1}(0) \cap \overline{\text{co}\ \omega(x, f)}$. Fie $z \in \text{co}\ \gamma(y_0)$, adică

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(s_i)y_0,\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ s_i \in \mathbf{R}_+,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Deoarece grupul $\{S(t) : \overline{\text{co}\ \omega(x, f)} \to \overline{\text{co}\ \omega(x, f)}\,;\ t \in \mathbf{R}\}$ este afin, avem

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)\, z\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{s_i}^{t+s_i} S(\tau)\ y_0\ \mathrm{d}\tau = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)y_0\ \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\int_t^{+s_i} S(\tau)\, y_0 \mathrm{d}\tau - \int_0^{s_i} S(\tau)y_0\ \mathrm{d}\tau \right),$$

Ţinînd cont că $\gamma(y_0)$ este mărginită avem în continuare

$$\limsup_{t\to\infty} \|\sigma(t)\, y_0 - p\| = \limsup_{t\to\infty} \|\sigma(t)\, z - p\| \leqslant \|z - p\|.$$

Pe de altă parte, folosind (j) se obţine imediat $\overline{\text{co}\ \omega(x, f)} = \overline{\text{co}\ \gamma(y_0)}$. Întrucît $p \in \overline{\text{co}\ \omega(x, f)} \cap A^{-1}(0)$ şi z a fost luat arbitrar din co $\gamma(y_0)$ rezultă

Scanned with OKEN Scanner

atunci din ultima inegalitate $p = \lim_{t\to\infty} \sigma(t)\, z$, $\forall z \in \overline{\text{co}\ \omega(x, f)}$. Cum p a fost ales arbitrar în $A^{-1}(0) \cap \overline{\text{co}\ \omega(x, f)}$ rezultă implicit că această mulțime are numai un element.

Fie acum $z_0 \in \omega(x, f)$, adică există $t_n \to \infty$ astfel încît $u(t_n\,; x, f) \to z_0$ pentru $n \to \infty$ sau, folosind notația din Observația 2.7, pentru $\varepsilon > 0$ fixat există k suficient de mare astfel încît $\|S_1(t_k)\ (x, f) - (z_0,\ 0)\|_X \leqslant \varepsilon$. Atunci

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t [S_1(\tau)\ (x, f) - S_1(\tau)\ (z_0,\ 0)]\,\mathrm{d}\tau\right\|_X \leqslant \left\|\frac{1}{t}\int_0^t [S_1(\tau)\,(x, f) -\right.$$

$$\left. - S_1(t_k + \tau)(x, f)]\ \mathrm{d}\tau\right\|_X + \left\|\frac{1}{t}\int_0^t [S_1\,(t_k+\tau)\ (x, f) - S_1\,(\tau)\ (z_0,\ 0)\mathrm{d}\tau\right\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \text{Const.}\frac{t_k}{t}\cdot$$

Prin urmare $\lim_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t u(\tau\,;\ x,\ f)\ \mathrm{d}\tau - \sigma\ (t)z_0\right\| = 0$. Cum $z_0 \in \omega(x,\ f)$ urmează din cele de mai sus că $\sigma(t)\, z_0$ converge tare, pentru $t \to \infty$, la unicul element p al mulțimii $A^{-1}(0) \cap \overline{\text{co}\ \omega(x, f)}$. În concluzie: $\frac{1}{t}\int_0^t u(\tau\,;\ x, f)\,\mathrm{d}\tau \to p$, pentru $t \to \infty$. Astfel, ținînd cont și de Teorema 1.2, demonstrația este terminată. ■

Observația 2.8. Mulțimea $\omega(x, f)$ depinde efectiv de f așa cum arată următorul exemplu simplu: $H = \mathbf{R}$, $A \equiv 0$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $t \geqslant 0$. Atunci, evident, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\omega(x, f) = \{x + 1\}$ iar $\omega(x,\ 0) = \omega(x) = \{x\}$.

Notă bibliografică. În redactarea materialului expus pînă acum cu privire la mulțimile ω-limită am folosit în mod esențial lucrările semnate de C. Dafermos și M. Slemrod [1] și A. Haraux [2,3].

Observația 2.9. Păstrînd notațiile de mai sus să arătăm că dacă $A^{-1}(0) \neq \emptyset$ și $(I + A)^{-1}$ este un operator compact atunci, pentru orice $(x, f) \in \overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+\,; H)$, traiectoria $\{u(t\,;\ x, f)\,;\ t \geqslant 0\}$ este relativ compactă. Cum am văzut în Observația 2.7, aceasta echivalează cu faptul că toate orbitele semigrupului $\{S_1(t)\,;\ t \geqslant 0\}$ sînt relativ compacte. Dar atunci conform Propoziției 2.4, care este adevărată pentru semigrupuri definite pe spații Banach generale, ne putem restrînge la o mulțime densă în $\overline{D(A)} \times L^1(\mathbf{R}_+\,; H)$, de exemplu la mulțimea $D(B) = D(A) \times W^{1.1}(\mathbf{R}_+\,; H)$. Fie deci $(x, f) \in D(B)$. Deoarece $A^{-1}(0) \neq \emptyset$, conform Observației 1.2, mulțimea $\{u(t\,;\ x, f)\,;\ t \geqslant 0\}$ este mărginită. De asemenea, $u(t\,;\ x, f)$, $t \geqslant 0$ este evident o soluție tare pentru (E) și

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\,u(t\,;\ x,\ f)\right\| \leqslant \|(A(x) + f(0))^0\| + \int_0^\infty \|f(s)\|\mathrm{d}s,\ \forall t \geqslant 0.$$

Din ecuația (E) deducem că

$$u(t\,;\ x,\ f) = (I + A)^{-1}\,(f(t) + u(t\,;\ x, f) - \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\,u(t\,;\ x, f)),\ \ \forall t \geqslant 0.$$

Cum $(I + A)^{-1}$ este compact este limpede că mulțimea $\{u(t\,;\ x, f)\,;\ t \geqslant 0\}$ este relativ compactă. ■

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul pe care-l expunem în continuare este o îmbunătățire a Propoziției 2.8.

Teorema 2.10 (A. Pazy). *Fie* $A : D(A) \subset H \to H$ *maximal monoton și* $\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)};\ t \geqslant 0\}$ *semigrupul generat de* $-A$. *Presupunem că mulțimea* $F = A^{-1}(0)$ *conține o bilă de codimensiune* 1. *Atunci pentru orice* $x \in \overline{D(A)}$ *există* $p \in F$ *astfel încît* $S(t)x \to p$, *pentru* $t \to \infty$.

Demonstrație. Fie x arbitrar în $\overline{D(A)}$. Conform cu Teorema 2.3 mulțimea $\omega(x)$ este nevidă. Trebuie să arătăm că $\omega(x)$ se reduce la un singur punct. Apartenența punctului limită la mulțimea F este cunoscută (vezi, de exemplu, Observația 1.3). Presupunem prin contradicție că $\omega(x)$ ar conține mai multe elemente. Amintim că $\forall p \in F$, există $\lim_{t\to\infty} \|S(t)x - p\| = \rho(p)$. Să remarcăm că $\forall p \in F$ limita $\rho(p) > 0$ deoarece în caz contrar $\omega(x)$ s-ar reduce la un punct. Evident $\omega(x) \subset \Omega = \bigcap_{p\in F} S(p, \rho(p))$, unde $S(p, r) = \{y \in H;\ \|y - p\| = r\}$, $p \in H$, $r > 0$. Notăm cu F_1 subspațiul afin închis gnerat de F. Prin ipoteză sau F_1 coincide cu H sau codim $(F_1) = 1$. Dacă $F_1 = H$, atunci conform cu Propoziția 2.8 $\omega(x)$ se reduce la un punct, fapt pe care l-am exclus în presupunerea noastră. Așadar rămîne de analizat situația codim$(F_1) = 1$. În acest caz Ω este conținută într-un spațiu afin D_1 de dimensiune 1. Într-adevăr, fie s_1, s_2, s_3 trei puncte din Ω. Atunci pentru orice $p \in F$ avem

$$\|s_i - p\| = \|s_j - p\|, \quad i,j = 1, 2, 3. \tag{2.43}$$

Dacă punctele s_1, s_2, s_3 n-ar fi pe o dreaptă, atunci (2.43) arată că F se reduce la un punct, deci codim$(F_1) \geqslant 2$, ceea ce contrazice ipoteza. Întrucît, pentru $p \in F$, $\omega(x) \subset \Omega = \Omega \cap S(p, \rho(p)) \subset D_1 \cap S(p, \rho(p))$ este evident că $\omega(x)$ poate conține cel mult două puncte. Pe de altă parte am presupus că $\omega(x)$ conține mai multe puncte deci $\omega(x) = \{p,q\}$ cu $p \neq q$. Din Teorema 2.7, $S(t)\ \omega(x) = \omega(x)$, $\forall t \geqslant 0$ și atunci, deoarece funcțiile $t \mapsto S(t)p$ și $t \mapsto S(t)q$ sînt continue, urmează că $p,q \in F$. Acest fapt este însă imposibil deoarece $S(t_n)x \to p \in F$ implică $S(t)x \to p$, pentru $t \to \infty$, adică $p = q$, adică $\omega(x) = \{p\}$ ceea ce contrazice presupunerea că $\omega(x)$ nu se reduce la un punct. Astfel teorema este complet demonstrată. ∎

Observația 2.10. Într-un fel Teorema 2.10 este cel mai bun rezultat posibil în această direcție așa cum se poate vedea din următorul exemplu datorat lui A. Pazy. Fie $H = l^2$ — spațiul real al șirurilor de numere reale $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cu proprietatea $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Acest spațiu se dotează cu produsul scalar definit prin $(x, y)_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall x = \{x\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in H$. Se definește

$$S(t)x = (x_1 \cos t - x_2 \sin t,\ x_1 \sin t + x_2 \cos t,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots),\ \forall t \in \mathbf{R},\ \forall x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} H.$$

Evident familia $\{S(t) : H \to H;\ t \in \mathbf{R}\}$ formează un grup liniar de izometrii avînd ca mulțime a punctelor de echilibru $F = \{y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in H;\ y_1 = y_2 = 0\}$. Evident F este un subspațiu al lui H de codimensiune 2 și pentru orice $x \in H \setminus F$, $S(t)x$ nu converge pentru $t \to \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

2.4. Soluții cu suport compact

Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton și $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+ ; H)$. Să remarcăm mai întîi că dacă $u(t)$, $t \geqslant 0$, este o soluție slabă pentru (E) avînd suportul compact, adică există $T \geqslant 0$, astfel încît $u(t) = 0$, $\forall t \geqslant T$, atunci în mod necesar $f(t) \in A(0)$ a.p.t. $t > T$. Se notează cu $B(x, \rho)$ bila închisă de centru x și de rază ρ din spațiul Hilbert real H. Să enunțăm acum

Teorema 2.11 *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator maximal monoton și $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+ ; H)$. Presupunem că pentru un $t_0 \geqslant 0$ există o funcție $\rho : [t_0, +\infty[\to \mathbf{R}_+$ local integrabilă Lebesgue, astfel încît*

$$B(f(t), \rho(t)) \subset A(0) \quad \text{a.p.t. } t > t_0 \text{ și} \tag{2.44}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \rho(t)dt = +\infty. \tag{2.45}$$

Atunci oricare ar fi $u(t)$, $t \geqslant 0$, o soluție slabă a ecuației (E) există $T \geqslant 0$ astfel încît $u(t) = 0$, $\forall t \geqslant T$.

Notă bibliografică. Teorema 2.11 este datorată lui I. Diaz [1,2]. Vezi de asemenea I. Diaz [3] în care se găsește o bibliografie cuprinzătoare cu privire la această problemă și aplicațiile sale.

Demonstrație. Dacă ar exista $t_1 \in [0, \infty[$ astfel încît $u(t_1) = 0$, atunci funcția

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{dacă } t \leqslant t_1 \\ 0, & \text{dacă } > t_1 \end{cases}$$

verifică în sens slab ecuația (E) și prin urmare datorită proprietății de unicitate a soluției $\tilde{u}(t)$, $t \geqslant 0$, coincide cu $u(t)$, $t \geqslant 0$. Așadar existența unui $t_1 \in [0, +\infty[$ care anulează pe $u(t)$ ar încheia demonstrația teoremei. Presupunem prin contradicție că $u(t) \neq 0$, $\forall t \geqslant 0$. Din (2.44) se deduce că $f(t) + \rho(t) \cdot h(t) \in A(0)$, a.p.t. $t > t_0$, pentru toți $h(t)$ satisfăcînd $\|h(t)\| \leqslant 1$, a.p.t. $t \in]t_0, +\infty[$. Să alegem $h(t) = u(t)/\|u(t)\|$, $\forall t > t_0$. Atunci, înmulțind scalar ecuația (E) cu $u(t)$, se deduce repede că $\|u(t)\| \leqslant \|u(t_0)\| - \int_{t_0}^{t} \rho(s)ds$, $t \geqslant t_0$. Această estimare alături de condiția (2.45) arată că pentru un T suficient de mare $u(T) = 0$, ceea ce este o contradicție. Astfel teorema este complet demonstrată. ∎

Observația 2.1. Dacă $0 \in \text{Int } A(0)$, atunci (2.43) și (2.44) sînt îndeplinite cu $f \equiv 0$ și $\rho(t)$ identic egală cu o constantă $\rho_0 > 0$ astfel încît $B(0, \rho_0) \subset A(0)$. Astfel, în acest caz avem : $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\exists T_x \geqslant 0$ astfel încît $S(t)\, x = 0$, $\forall t \geqslant T_x$. Pentru problema de ordinul doi (1.35) este valabil următorul rezultat :

Teorema 2.12. (V. Barbu). *Fie $B = \partial\varphi$, unde $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ este o funcție proprie, convexă și inferior semicontinuă. Dacă în plus $0 \in \text{Int } B(0)$, atunci $\forall x \in \overline{D(B)}$ soluția corespunzătoare $u(t)$, $t \geqslant 0$, pentru problema (1.35) are suport compact.*

Demonstrație. Condiția $0 \in B(0)$ implică $\min \{\varphi(v) ; v \in H\} = \varphi(0)$. Fără a restrînge generalitatea se poate presupune că $\varphi(0) = 0$. Atunci din definiția subdiferențialei avem

$$\varphi(v) \leqslant (w, v), \quad \forall w \in B(v) \tag{2.46}$$

și $(y, v) \leqslant \varphi(v)$, $\forall y \in B(0)$, $\forall v \in H$.

Deoarece $0 \in \operatorname{Int} B(0)$ urmează că există $r > 0$ astfel încît $\{w \in H;\ \|w\| \leqslant r\} \subset B(0)$. Deci se poate alege $y < rv/\|v\|$, $v \neq 0$ în ultima inegalitate și se obține $\varphi(v) \geqslant r\|v\|$, $\forall v \in H$. Astfel, ținînd seama și de (2.46), obținem

$$r\|v\| \leqslant \|B^{\circ}(v)\| \cdot \|v\|, \qquad \forall v \in D(B). \tag{2.47}$$

Să arătăm în continuare că $u(t)$, $t \geqslant 0$, soluția problemei (1.35), are suport compact. Notînd cu $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ semigrupul generat de $-B^{1/2}$ avem $u(t) = S(t)x$ și întrucît $S(t)\,0 = 0$, $\forall t \geqslant 0$, rezultă că funcția $t \mapsto \|u(t)$ este monoton descrescătoare. Astfel dacă presupunem prin contradicție că $u(t)$ nu are suport compact, atunci rezultă că $u(t) \neq 0$, $\forall t \geqslant 0$. Folosind acum (2.47) și faptul că $u(t)$, $t \geqslant 0$, verifică (1.35) se obține $\|(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2)(t)\| \geqslant r$, a.p.t. $t \in \mathbf{R}_+$. Dar ultima relație contrazice faptul cunoscut că $t^{3/2}\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2 \in L^2(\mathbf{R}_+\ H)$ (vezi Teorema 2.8 din Cap. I). Contradicția obținută încheie demonstrația teoremei. ■

Observația 2.12. Este ușor de văzut că dacă $B = \partial\varphi$ și $0 \in R(B)$, atunci soluția $u(t)$, $t \geqslant 0$, pentru problema (1.35) este tocmai soluția următoarei probleme de optimizare:

Să se minimizeze funcționala $F(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left\| \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \right\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \varphi(v(t))\,\mathrm{d}t$ în clasa funcțiilor $v : \mathbf{R}_+ \to H$ satisfăcînd condițiile: $v \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+;\ H)$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \in L^2(\mathbf{R}_+;\ H)$ și $v(0) = x$. Într-adevăr, este evident că

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \right\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \varphi(u(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T \left\| \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \right\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \varphi(v(t))\,\mathrm{d}t + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(T),\ u(T) - v(T) \right),$$

pentru orice $T > 0$ și orice v din clasa menționată.

Ținînd cont că $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)(T) \to 0$, pentru $T \to \infty$, afirmația că $u(t)$, $t \geqslant 0$, minimizează funcționala de mai sus în clasa menționată a funcțiilor v rezultă prin trecere la limită cu $T \to \infty$ în ultima inegalitate. De remarcat că $u(t)$, $t \geqslant 0$, este unica soluție a acestei probleme de optimizare. Dacă admitem acum că ipotezele Teoremei 2.12 sînt îndeplinite, atunci rezultă că pentru orice $x \in \overline{D(\varphi)}$ există o soluție unică cu suport compact care minimizează funcționala F în clasa menționată a funcțiilor v. Această observație arată importanța studierii soluțiilor cu suport compact pentru problema (1.35).

§ 3. SCHEME CU DIFERENȚE FINITE PENTRU APROXIMAREA SOLUȚIILOR ECUAȚIEI $0 \in A(u)$

În acest paragraf vom stabili versiuni discrete ale mai multor rezultate de convergență obținute în paragrafele precedente ale acestui capitol.

3.1. Scheme cu diferențe finite de ordinul întîi

Fie din nou $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton și $\{S(t); \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}; t \geq 0\}$ semigrupul generat de $-A$. Să înlocuim ecuația diferențială (E_0) care definește $S(t)x$ prin schema cu diferențe finite de ordinul întîi

$$\begin{cases} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{c_n} + A(y_n) \ni 0, \; c_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ y_0 = x \in H \end{cases} \tag{3.1}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} y_n = (I + c_n A)^{-1}(y_{n-1}), \; n = 1, 2, \ldots \\ y_0 = x. \end{cases} \tag{3.2}$$

Conform cu R. T. Rockafellar [1] în loc de (3.2) se poate considera următorul algoritm

$$\begin{cases} x_n = (I + c_n A)^{-1}(x_{n-1}) + f_n, \; n = 1, 2, \ldots \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{3.3}$$

unde șirul $\{f_n\}$ ar reprezenta șirul erorilor de calcul (vezi și Observația 3.4 de mai jos). În terminologia lui R.T . Rockafellar [1] (3.3) se numește *algoritmul punctului proxim.*

Evident, din faptul că A este presupus maximal monoton, rezultă că $\forall x \in H$, $\forall \{c_n\} \subset]0, +\infty[$ și $\forall \{f_n\} \subset H$ problema (3.3) admite o soluție unică $\{x_n\}$.

Cu ajutorul șirului $\{x_n\}$ generat de algoritmul (3.3) se poate defini următorul șir al mediilor

$$w_n = \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \, , \; n = 1, 2, \ldots . \tag{3.4}$$

Ca prim rezultat al acestei secțiuni vom prezenta o versiune discretă a Teoremei 1.2 :

Teorema 3.1. *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton. Presupunem în plus că mulțimea $F = A^{-1}(0)$ este nevidă și*

$$c_i > 0, \; i = 1, 2, \ldots \text{ și } \sum_{i=1}^{\infty} c_i = +\infty ; \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\| < +\infty. \tag{3.6}$$

Atunci șirul $\{w_n\}$ dat de (3.4) converge slab la un element $p \in F$ (adică $0 \in A(p)$). Mai mult

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathrm{Proi}_F \, x_n - p\| = 0. \tag{3.7}$$

Notă bibliografică. În cazul $f_n = 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ și $\{c_n\} \in l^2 \setminus l^1$ Teorema 3.1 este un caz particular al unui rezultat stabilit de P. L. Lions [1]. De remarcat că impunîndu-se condiția mai puternică $\{c_n\} \notin l^2$ se obține chiar convrgența slabă a șirului însuși (vezi Teorema 3.2 și Observația 3.1 de mai jos). Menționăm că Teorema 3.1 cu demonstrația pe care o reproducem aici a fost de asemenea stabilită în mod independent de G. Passty [1] (pentru cazul particular $f_n = 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$) și de autor (vezi Teza de Doctorat, Iași, 1981).

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Vom folosi, în esență, aceleași idei care au servit la demonstrarea versiunii continue — Teorema 1.2. Transpunerea ideilor nu se face însă în mod banal, de aceea vom expune demonstrația în întregime Astfel se notează $v_n = \text{Proi}_F x_n$. Să arătăm mai întîi că există $\lim \|x_n - v_n\|$ pentru $n \to \infty$. Deoarece avem evident $v_n = (I + c_n A)^{-1}(v_n)$ se deduce că $\|x_{n+m} - v_n\| \leqslant \|x_n - v_n\| + \sum_{i=n+1}^{n+m} \|f_i\|$. Prin urmare

$$\|x_{n+m} - v_{n+m}\| - \sum_{i=1}^{n+m} \|f_i\| \leqslant \|x_{n+m} - v_n\| - \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| -$$

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} \|f_i\| \leqslant \|x_n - v_n\| - \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|. \tag{3.8}$$

Șirurile $\{x_n\}$ și $\{w_n\}$ sînt mărginite. Într-adevăr, pentru $y \in F$

$$\|x_n - y\| \leqslant \|x - y\| + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \leqslant \text{Const. și } \|w_n - y\| \leqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} c_i \|x_i - y\| \leqslant \text{Const.}$$

Atunci, ținînd cont de (3.6) și (3.8), se deduce că șirul $\{\|x_n - v_n\|\}$ este convergent. Identitatea paralelogramului aplicată vectorilor $a = -x_{n+m} + v_{n+m}$ și $b = v_n - x_{n+m}$ implică :

$$\|v_{n+m} - v_n\|^2 + \|v_{n+m} + v_n - 2x_{n+m}\|^2 =$$

$$= 2\|v_{n+m} - x_{n+m}\|^2 + 2\|x_{n+m} - v_n\|^2. \tag{3.9}$$

Deoarece F este convexă putem scrie

$$\|v_{n+m} + v_n - 2x_{n+m}\|^2 \geqslant 4\|v_{n+m} - x_{n+m}\|^2. \tag{3.10}$$

Din (3.8), (3.9) și (3.10) rezultă

$$\|v_{n+m} - v_n\|^2 \leqslant 2[(\|x_n - v_n\| + \sum_{i=n+1}^{n+m} \|f_i\|)^2 - \|x_{n+m} - v_{n+m}\|^2], \tag{3.11}$$

deci șirul $\{v_n\}$ este Cauchy, adică (3.7) este îndeplinită. Desigur limita p aparține mulțimii F, deoarece F este închisă. Pe de altă parte din definiția proiecției avem $(x_n - v_n, y - v_n) \leqslant 0$, $\forall y \in F$ sau $(x_n - v_n, y - p) \leqslant (x_n - v_n, v_n - p) \leqslant \text{Const.} \|v_n - p\|$, unde p este limita din (3.7). Prin urmare

$$\left(w_n - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i,\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} c_i v_i\,,\ y - p\right) \leqslant \text{Const.} \sum_{i=1}^{n} c_i \|v_i - p\| \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_i. \tag{3.12}$$

Datorită ipotezei (3.5) membrul secund din (3.12) tinde la zero. În continuare vom arăta că limita slabă a oricărui subșir al șirului $\{w_n\}$ este conținută în F. Pentru aceasta să observăm că (3.3) este echivalentă cu

$$x_n - x_{n-1} - f_n + c_n A(x_n - f_n) \ni 0. \tag{3.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind scalar (3.13) cu $x_n - v - f_n$, obținem

$$(3.14)\quad (1/2)\|x_n - v - f_n\|^2 - (1/2)\|x_{n-1} - v\|^2 + c_n(\bar{v},\ x_n - v - f_n) \leqslant 0,$$

pentru orice $[v, \bar{v}] \in A$.

Sumînd apoi în (3.14) găsim inegalitatea

$$(3.15)\quad (1/2)\|x_n - v\|^2 - (1/2)\|x - v\|^2 + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|^2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}(f_i,\ x_i - v) + \left(\bar{v},\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) v\right) \leqslant 0.$$

Dacă q este limita slabă a unui subșir oarecare al lui $\{w_n\}$, atunci din (3.15) se obține $(\bar{v},\ q - v) \leqslant 0$, $\forall [v, \bar{v}] \in A$, deci $q \in F$, datorită maximalității operatorului A. Pe de altă parte inegalitatea (3.12) implică $(q - p,\ y - p) \leqslant 0$, $\forall y \in F$, de unde rezultă $p = q$, adică limita slabă a oricărui subșir al lui $\{w_n\}$ coincide cu p. Aceasta încheie demonstrația teoremei.

Teorema 3.2. (H. Brézis și P. L. Lions). *Presupunem îndeplinite toate condițiile din Teorema* 3.1 *și în plus că operatorul* A *este demipozitiv (vezi Definiția* 1.1). *Atunci,* $\forall x \in H$, *șirul* $\{x_n\}$ *generat de* (3.3) *converge slab la un punct* $p \in F$. *Această concluzie se păstrează dacă presupunem că* A *este maximal monoton oarecare dar, în schimb, condiția* (3.5) *este întărită prin următoarea :*

$$(3.16)\quad c_i > 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots \text{ și } \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = +\infty.$$

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că nu se restrînge cu nimic generalitatea dacă se presupune că $f_n = 0$, $\forall n$, adică șirul $\{x_n\}$ generat de (3.3) coincide cu șirul $\{y_n\}$ generat de (3.2). Într-adevăr, să admitem că teorema este adevărată pentru $\{y_n\}$, oricare ar fi punctul de plecare $x \in H$. Atunci, pentru k fixat șirul $\{\xi_n(k)\}$ definit prin : $\xi_0(k) = x_k$, $\xi_1(k) = (I + c_{k+1}A)^{-1}(x_k), \ldots, \xi_n(k) = (I + c_{n+k}A)^{-1}(\xi_{n-1}(k)), \ldots$ converge slab la un punct să zicem $\xi(k)$, unde $\{x_n\}$ este șirul dat de (3.3) cu $x \in H$ și $\{f_n\} \in l^1(H)$. Mai mult, se poate vedea ușor că

$$(3.17)\quad \|\xi_n(k) - \xi_{n+1}(k-1)\| \leqslant \|f_k\|$$

ceea ce implică, trecînd la limită, că $\|\xi(k) - \xi(k-1)\| \leqslant \|f_k\|$. Prin urmare $\{\xi(k)\}$ este șir Cauchy și deci $\xi(k) \to a$, pentru $k \to \infty$. Ținînd cont din nou de relația (3.17) particularizată pentru $n = 0$ și k, apoi $n = 1$ și $k - 1, \ldots$, și în fine pentru n și $k - n$, unde $k > n$ se obține $\|x_k - \xi_{n+1}(k - n - 1)\| \leqslant \sum_{i=k-n}^{k}\|f_i\|$ sau, înlocuind k prin $k + n$, avem $\|x_{k+n} - \xi_{n+1}(k-1)\| \leqslant \sum_{i=k}^{k+n}\|f_i\|$. Să mai scriem că

$$x_{k+n} - a = x_{k+n} - \xi_{n+1}(k-1) + \xi_{n+1}(k-1) -$$

$$- \xi(k-1) + \xi(k-1) - a$$

Atunci, fixînd k suficient de mare astfel încît $\sum_{i=k}^{k+n}\|f_i\| + \|\xi(k) - a\| \leqslant \varepsilon$

se obține că : $\forall \eta \in H$, $\limsup_{n\to\infty} |(x_{k+n} - a, \eta)| \leqslant \varepsilon \|\eta\|$ adică $x_n \rightharpoonup a$. Așadar este suficient să demonstrăm teorema pentru $\{y_n\}$ generat de (3.2). Considerăm întîi cazul cînd A este maximal monoton oarecare și $\{c_n\}$ verifică (3.16). Dacă A este multivoc, pentru simplitatea scrierii vom nota cu $A(y_n)$ expresia $(1/c_n)(y_{n-1} - y_n)$, adică putem scrie că

$$y_n + c_n A(y_n) = y_{n-1},\ n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.18}$$

Folosind faptul că $(A(y_n) - A(y_{n-1}), y_n - y_{n-1}) \geqslant 0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ și relația (3.18) se deduce că

$$(A(y_n) - A(y_{n-1}), A(y_n)) \leqslant 0,\ n = 1, 2,\ \ldots$$

Prin urmare șirul $\{\|A(y_n)\|\}$ este descrescător. Mai departe, pentru $q \in F$ se obține ușor din (3.18) că

$$\|y_n - q\|^2 + c_n^2 \|A(y_n)\|^2 \leqslant \|y_{n-1} - q\|^2,\ n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.19}$$

Sumînd în (3.19) și ținînd cont că $\{\|A(y_n)\|\}$ este descrescător se obține

$$\|A(y_n)\| \leqslant \operatorname{dist}(x, F) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2}. \tag{3.20}$$

Din (3.19) mai rezultă că pentru orice $q \in F$, șirul $\{\|y_n - q\|\}$ este descrescător, deci convergent, iar din (3.20) se deduce că $A(y_n) \to 0$, deci limita slabă pentru orice subșir al șirului $\{y_n\}$ este conținută în F. Astfel sîntem în condițiile de aplicabilitate a lemei lui Opial din Cap. 0. În concluzie există $p \in F$ astfel încît $y_n \rightharpoonup p$.

Să admitem acum că A este maximal monoton demipozitiv și $\{c_n\}$ satisface (3.5). Pentru a demonstra teorema în acest caz vom utiliza un raționament similar cu cel folosit în demonstrația Propoziției 1.1. Fie $y_0 \in F$ arbitrar. Vom arăta că

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ \exists m \text{ cu } N \leqslant m \leqslant n \text{ verificînd } \|y_n - y_m\| < \varepsilon \tag{3.21}$$
$$\text{și } (A(y_m), y_m - y_0) < \varepsilon.$$

Evident $(A(y_k),\ y_k - y_0) \geqslant 0$ și folosind (3.18) avem $(1/2)\|y_k - y_0\|^2 + c_k(A(y_k),\ y_k - y_0) \leqslant (1/2)\|y_{k-1} - y_0\|^2$ de unde prin sumare se obține

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(A(y_k),\ y_k - y_0) < \infty. \tag{3.22}$$

Pentru $\varepsilon > 0$ fie $P_\varepsilon = \{k;\ (A(y_k), y_k - y_0) \geqslant \varepsilon\}$. Datorită relației (3.22),

$$\sum_{k \in P_\varepsilon} c_k < \infty.$$

Prin urmare $\sum_{k \in P_\varepsilon} \|y_k - y_{k-1}\| = \sum_{k \in P_\varepsilon} c_k \|A(y_k)\| < \infty$, întrucît șirul $\{\|A(y_k)\|\}$ este descrescător. Deci există $N_1 = N_1(\varepsilon)$ astfel încît

$$\sum_{k \in P_\varepsilon,\ k > N_1} \|y_k - y_{k-1}\| < \varepsilon. \tag{3.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Datorită relației (3.22) și ipotezei (3.5) se poate alege $N \geqslant N_1$ astfel încît $(A(y_N), y_N - y_0) < \varepsilon$. Fiind dat $n \geqslant N$, se alege m din (3.21) după cum urmează:

(a) Dacă $n \notin P_\varepsilon$, atunci se alege $m = n$;

(b) Dacă $n \in P_\varepsilon$, atunci se alege drept m cel mai mare număr întreg $k < n$ astfel încît $k \notin P_\varepsilon$; evident, $m \geqslant N$, $\{m+1, \ldots, n\} \subset P_\varepsilon$ deci, conform cu (3.23), $\|y_n - y_m\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|y_k - y_{k-1}\| < \varepsilon$. Astfel, afirmația (3.21) este dovedită. Considerăm acum că $y_0 \in F$ este punctul care intervine în definiția demipozitivității. Evident (3.19) rămîne adevărată pentru orice $q \in F$, deci șirul $\{\|y_n - q\|\}$ este convergent, $\forall q \in F$. Fie l limita slabă a unui subșir $\{y_{n_k}\}$ al șirului $\{y_n\}$. Atunci, folosind (3.21), deducem că se poate construi un alt subșir $\{y_{m_k}\}$ avînd limita slabă tot l și satisfăcînd în plus condiția $(A(y_{m_k}), y_{m_k} - y_0) \to 0$. Din demipozitivatea lui A urmează atunci că $l \in F$. Astfel lema lui Opial se poate din nou aplica. Teorema este astfel complet demonstrată. ∎

Observația 3.1. Dacă $\{c_n\} \subset]0, +\infty[$ aparține spațiului l^1, atunci $\forall x \in H$ șirul $\{x_n\}$ definit de (3.3) converge tare, dar în general limita sa nu este în F. Este suficient, datorită raționamentului din demonstrația Teoremei 3.2, să verificăm acest fapt pentru șirurile $\{y_n\}$ definite de (3.2). Într-adevăr, avem imediat $\sum_{n=2}^{\infty} \|y_n - y_{n-1}\| \leqslant \|A(y_1)\| \sum_{n=2}^{\infty} c_n < +\infty$. Teorema 3.2, partea a doua, precizează Teorema 3.1 întrucît arată că pentru $\sum_1^\infty c_i^2 = +\infty$ are loc convergența slabă chiar a șirului $\{x_n\}$ (fapt ce implică evident convergența slabă a șirului mediilor $\{w_n\}$). În plus, se poate preciza că pentru orice șir $\{c_n\} \subset]0, +\infty[$ satisfăcînd condiția $\{c_n\} \in l^2 \setminus l^1$ se poate construi un exemplu simplu (vezi H. Brézis și P. L. Lions [1]) astfel încît $\{y_n\}$ dat de (3.2) nu converge. Anume, fie $H = \mathbf{R}^2$ și $A: D(A) = \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, rotația de unghi $\pi/2$, adică: $A([y_1, y_2]) = [-y_2, y_1]$, $\forall y = [y_1, y_2] \in \mathbf{R}^2$. Identificînd $\mathbf{R}^2$ cu $\mathbf{C}$ se poate folosi notația complexă. Astfel, avem: $A(y) = iy$, $\forall y \in \mathbf{C}$ și $y_n = x \sum_{k=1}^{n} (1 + ic_k)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Atunci evident $|y_n| = |A(y_n)| = |x| \cdot \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k^2)^{-1/2}$ converge la o limită strict pozitivă, dacă $x \neq 0$. Prin urmare $y_n = |y_n| \exp i \left(\arg x - \sum_{k=1}^{n} \theta_k \right)$, cu $\operatorname{tg} \theta_k = c_k (0 < \theta_k < \pi/2$, pentru k suficient de mare) nu converge întrucît este ușor de văzut că $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k = +\infty$.

În continuare va fi expusă o versiune discretă a Teoremei 2.1, anume:

Teorema 3.3. *Presupunem îndeplinite toate condițiile din Teorema* 3.1 *și în plus, mai presupunem că* A *este impar. Atunci, șirul* $\{w_n\}$ *dat de* (3.4) *converge tare la* $p \in F$.

Notă bibliografică. Teorema 3.3 a fost stabilită de P.L. Lions [1]. Demonstrația se bazează pe o tehnică inițiată de R. E. Bruck [3].

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Deoarece A este impar $0 \in A^{-1}(0)$ și avem $\|x_n\| \leqslant \|x_m\| + \sum_{r=m+1}^{n} \|f_r\|$, pentru $n > m \geqslant 0$. Astfel, folosind (3.6), obținem că pentru orice $x \in H$, există $\rho \geqslant 0$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \rho. \tag{3.24}$$

Să facem notația $u_n = c_n^{-1}(x_{n-1} - x_n + f_n) \in A(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Deoarece A este impar se obține ușor că $|(u_i, x_j) + (u_j, x_i)| \leqslant (u_j, x_i) + (u_j, x_j)$, $\forall i,j = 1,2,\ldots$ Înmulțind această inegalitate cu $2c_ic_j$ sîntem conduși la următoarea inegalitate

$$\begin{aligned} 2|(c_jx_j,\ x_{i-1} - x_i + f_i) + (c_ix_i,\ x_{j-1} - x_j + f_j)| \leqslant \\ \leqslant c_j(\|x_{i-1}\|^2 - \|x_i\|^2) + c_i(\|x_{j-1}\|^2 - \|x_j\|^2) + \\ + 2c_j(x_i, f_i) + 2c_i(x_j, f_j),\ \forall i,j = 1, 2\ldots. \end{aligned}$$

Trecînd în membrul al doilea termenii care conțin f_i și f_j și sumînd apoi după i și j obținem

$$\begin{aligned} 2\left|\left(\sum_{j=k+1}^{n} c_jx_j,\ x_k - x_n\right)\right| \leqslant \left(\sum_{j=k+1}^{n} c_j\right)\Bigg(\|x_k\|^2 - \|x_n\|^2 + \\ + 4M\sum_{j=k+1}^{n} \|f_j\|\Bigg),\ k < n, \end{aligned} \tag{3.25}$$

unde $M = \sup\{\|x_n\|;\ n \in \mathbf{N}\} < \infty$.

Pe de altă arte, pentru k fixat, $\lim_{n\to\infty}\left[w_n - \left(\sum_{j=k+1}^{n} c_j\right)^{-1}\sum_{j=k+1}^{n} c_j\,x_j\right] = 0$. Acest fapt împreună cu (3.24) și (3.25) implică $\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} |(w_n, x_k - x_n)| = 0$. Cu alte cuvinte există șirul $\rho_k \to 0$ și șirul strict crescător $\{n(k)\}_k$ de întregi pozitivi astfel încît

$$|(w_n,\ x_k - x_n)| \leqslant \rho_k,\ \forall n > n(k). \tag{3.26}$$

Din Teorema 3.1 cunoaștem deja că, pentru fiecare $x \in H$, există $p \in F$ astfel încît $w_n \rightharpoonup p$. Deoarece, conform relației (3.26), $|(w_n, x_k - x_i)| \leqslant \rho_k + \rho_i$, $\forall n > \max(n(k), n(i))$ rezultă imediat, trecînd la limită cu $n \to \infty$, $|(p, x_k) - (p, x_i)| \leqslant \rho_k + \rho_i$.

Astfel, șirul $\{(p, x_n)\}$ este convergent și, datorită condiției (3.5), va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} (p, x_n) = \lim_{n\to\infty} (p, w_n) = \|p\|^2. \tag{3.27}$$

Pe de altă parte, relația (3.26) se mai scrie în forma

$$-\rho_k + (x_k, w_n) \leqslant (x_n, w_n) \leqslant (x_k, z_n) + \rho_k,\ \forall n > n(k).$$

Prin urmare $-\rho_k + (x_k, p) \leqslant \liminf_{n\to\infty} (x_n, w_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} (x_n, w_n) \leqslant (x_k, p) + \rho_k$, de unde, trecînd la limită cu $k \to \infty$, și ținînd cont de (3.27), obținem că

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, w_n) = \|p\|^2. \tag{3.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $w_n \rightharpoonup p$ este evident că $\|p\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|w_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Astfel, dacă s-ar întîmpla că $\|x_n\| \to \|p\|$, atunci ar rezulta imediat că $w_n \to p$. De aceea, se poate presupune, fără a se restringe generalitatea, că $\|p\| < \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Cu alte cuvinte, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, se poate presupune că există $n(\varepsilon)$ astfel încît (vezi și (3.28))

$$(3.29) \qquad (x_n, w_n) \leqslant \|p\|^2 + \varepsilon \leqslant \|x_n\|^2, \ \forall n \geqslant n(\varepsilon).$$

Notînd $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$ avem identitatea $\lambda_n^2 \|w_n\|^2 = 2 \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j (w_j, x_j) - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \|x_j\|^2$ de unde se deduce, ținînd seama de (3.29), că

$$\lambda_n^2 \|w_n\| \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j (\|p\|^2 + \varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 (\|p\|^2 + \varepsilon) + C_\varepsilon =$$

$$= \lambda_n^2 (\|p^2\| + \varepsilon) + C_\varepsilon,$$

unde $C_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \{2c_j\lambda_j[(w_j, x_j) - \|p\|^2 - \varepsilon] + c_j^2[\|p\|^2 + \varepsilon - \|x_j\|^2]\}$.

Prin urmare $\limsup_{n\to\infty} \|w_n\|^2 \leqslant \|p\|^2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ suficient de mic adică $\limsup_{n\to\infty} \|w_n\|^2 \leqslant \|p\|^2$. Ținînd cont și de faptul că $w_n \rightharpoonup p$ deducem că $w_n \to p$, ceea ce încheie demonstrația teoremei. ∎

Teorema 3.4. *Presupunem că $A = \partial\varphi$, unde $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ este o funcție proprie, convexă, semicontinuă inferior și pară. Mai presupunem că $\{f_n\}$ verifică (3.6). Atunci, oricare ar fi șirul $\{c_n\} \subset]0, +\infty[$ și $\forall x \in H$, șirul $\{x_n\}$ generat de (3.3) este tare convergent. Dacă în plus $\{c_n\}$ satisface (3.5), atunci limita șirului $\{x_n\}$ este conținută în $F = A^{-1}(0)$.*

Notă bibliografică. Teorema 3.4 este datorată autorilor H. Brézis și P. L. Lions [1]. Demonstrația expusă mai jos prezintă totuși unele simplificări față de textul original.

Demonstrație. Conform observației făcute în demonstrația Teoremei 3.2 se poate presupune că $f_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, adică este suficient să demonstrăm teorema pentru șirul $\{y_n\}$ generat de (3.2). Vom folosi din nou notația (3.18). Mai întîi să observăm că

$$\varphi(y_n) - \varphi(y_{n-1}) \leqslant (A(y_n), y_n - y_{n-1}) = -c_n \|A(y_n)^2 \leqslant 0, \ \forall n = 2, 3, \ldots$$

Deci șirul $\{\varphi(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ este descrescător. Pe de altă parte avem

$$(3.30) \quad \varphi(y_n) - \varphi(q) \leqslant (A(y_n), y_n - q) = c_n^{-1} (y_{n-1} - y_n, y_n - q) \leqslant$$

$$\leqslant (1/2c_n)(\|y_{n-1} - q\|^2 - \|y_n - q\|^2), \ \forall q \in H, \ n = 1, 2, \ldots$$

Luînd în această inegalitate $q = -y_k$ cu $k \geqslant n$ rezultă că șirul $n \mapsto \|y_n + y_k\|$ este descrescător pentru $1 \leqslant n \leqslant k$. În particular $2\|y_k\| \leqslant \|y_n + y_k\|$, $1 \leqslant n \leqslant k$. Astfel se deduce că

$$(3.31) \quad \|y_n - y_k\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_k\|^2 - \|y_n + y_k\|^2 \leqslant 2\|y_n\|^2 - 2\|y_k\|^2,$$

pentru $1 \leqslant n \leqslant k$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece φ este pară urmează că $0 \in A(0)$, adică 0 este punct de minim pentru φ(vezi Propoziţiile 2.1 şi 2.2). Atunci (3.19)arată că $\{\|y_n\|\}$ este descrescător, deci convergent. Astfel din inegalitatea (3.31) deducem că $\{y_n\}$ este tare convergent, adică prima parte a teoremei este demonstrată. Presupunem acum în plus că $\{c_n\}$ satisface (3.5). Luînd în (3.30) $q \in F$ şi sumînd se obţine $\sum_{k=1}^{n} c_k[\varphi(y_k) - \inf \varphi] \leqslant (1/2)\|x - q\|^2$, $n \geqslant 1$. Deoarece şirul $\{\varphi(y_k) - \inf \varphi\}$ este descrescător obţinem $\varphi(y_n) - \inf \varphi \leqslant \leqslant \|x - q\|^2/2 \sum_{k=1}^{n} c_k$ deci, în virtutea condiţiei (3.5), avem

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \inf \varphi. \tag{3.32}$$

Întrucît y_n converge tare la un p, putem conchide, folosind (3.32), că $p \in F$. Teorema este acum complet demonstrată. ∎

Observaţia 3.2. Dacă $A = \partial\varphi$, atunci A este demipozitiv. Aşadar, chiar dacă φ nu este pară, dar se menţin condiţiile (3.5) şi (3.6) se obţine totuşi convergenţa slabă a şirului $\{x_n\}$ la un punct din F, aşa cum rezultă din Teorema 3.2. Acest fapt poate fi redemonstrat prin intermediul relaţiei (3.32), care ne spune că limitele slabe ale subşirurilor lui $\{y_n\}$ sînt conţinute în F, deci se poate aplica din nou lema lui Opial.

Observaţia 3.3. Există şi alte condiţii care conduc la convergenţa tare a şirului $\{x_n\}$ dat de (3.3). Astfel, presupunînd îndeplinite condiţiile Teoremei 3.2 şi admiţînd în plus că pentru orice $\lambda > 0$ (echivalent există $\lambda > 0$) $(I + \lambda A)^{-1}$ este un operator compact, atunci este evident că şirul $\{x_n\}$ este chiar tare convergent. În aceeaşi ordine de idei să presupunem că A este maximal monoton şi că în plus este tare monoton, adică există $a > 0$ astfel încît este îndeplinită condiţia (2.24). Atunci $\forall x \in H$, $\{x_n\}$ este tare convergent de îndată ce condiţiile (3.5) şi (3.6) sînt îndeplinite. În acest caz $A^{-1}(0)$ conţine evident un singur element, să zicem p. Este suficient să dovedim că şirul $\{y_n\}$ generat de (3.2) este tare convergent la p. Într-adevăr,

avem $\|y_n - p\| \leqslant \|x - p\| \prod_{j=1}^{n} (1 + ac_j)^{-1} \leqslant \left(a \sum_{j=1}^{n} c_j\right)^{-1} \|x - p\|$, ceea ce dovedeşte afirmaţia.

Observaţia 3.4. Dacă $A = \partial\varphi$, algoritmul (3.2) reprezintă un algoritm pentru minimizarea funcţiei φ, de îndată ce condiţia (3.5) este verificată. Într-adevăr, $0 \in A(p)$ dacă şi numai dacă

$$p = \arg\min_{z} \varphi(z). \tag{3.33}$$

Astfel (3.2) poate fi reformulat astfel:

$$\begin{cases} y_n = \arg\min_{z} \varphi_n(z), & n = 1,2,\ldots \\ y_0 = x, \end{cases} \tag{3.2)'}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\varphi_n(x) = \varphi(x) + (1/2\,c_n)\,\|x - y_{n-1}\|^2$, $n = 1, 2, \ldots$ Astfel problema de optimizare (3.33) este înlocuită printr-un șir de probleme „mai bune" notate cu (3.2)′ asociate funcțiilor φ_n. Pentru o discuție interesantă referitoare la avantajul înlocuirii problemei originale (3.33) prin șirul de probleme modificate (3.2)′ recomandăm cititorului lucrarea lui R.T. Rockafellar [2]. Desigur, calculul efectiv al fiecărui y_n din (3.2)′ se poate realiza cu o anumită eroare f_n. Acest fapt arată importanța studierii algoritmului punctului proxim în forma (3.3).

Observație 3.5. După cum s-a văzut în toate teoremele de convergență de mai sus apare condiția $\{\|f_n\|\} \in l^1$, adică (3.6). Desigur această restricție asupra erorilor de calcul este prea severă din punct de vedere practic. Pe de altă parte, dacă această presupunere nu este satisfăcută șirul $\{x_n\}$ generat de (3.3) poate fi nemărginit așa cum arată următorul exemplu simplu: $H = \mathbf{R}$, $A \equiv 0$ și $\{f_n\} \subset \mathbf{R}$ cu proprietatea că șirul sumelor parțiale $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}$ este nemărginit.

Într-adevăr, în acest caz $x_n = x + \sum_{i=1}^{n} f_i$, pentru orice șir $\{c_n\}$.

În anumite cazuri (vezi Teorema 3.5 de mai jos) se poate totuși obține mărginirea șirului $\{x_n\}$ presupunînd condiții rezonabile pentru $\{f_n\}$ și $\{c_n\}$. Aceasta este foarte important. Într-adevăr, scriind (3.3) în forma

$$(3.3)' \qquad \begin{cases} (1/c_n)(x_{n-1} - x_n + f_n) \in A(x_n - f_n), & n = 1, 2, \ldots \\ x_0 = x \end{cases}$$

și presupunînd că: $\{x_n\}$ este mărginit, $f_n \to 0$ și $c_n \to \infty$ este evident atunci că toate punctele limită slabă ale șirului $\{x_n\}$ aparțin mulțimii $A^{-1}(0)$. Să observăm că în cazul $A = \partial\varphi$ aceasta înseamnă că toate aceste limite slabe sînt puncte de minim pentru φ și în plus avem $\varphi(x_n - f_n) \to \inf_z \varphi(z)$, adică $\{x_n\}$ este, să zicem, „aproape" șir minimizant pentru funcția φ.

Teorema 3.5. (Autorul [4]). *Presupunem că* $A : D(A) \subset H \to H$ *este maximal monoton și, în plus,*

$$(3.34) \qquad \lim_{\substack{\|\xi\| \to \infty \\ \xi \in D(A)}} (A(\xi), \xi)/\|\xi\| = +\infty.$$

Mai presupunem că

(3.35) $\exists\, \varepsilon > 0$ *astfel încît* $c_n \geqslant \varepsilon > 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ *și* $\|f_n\| \leqslant C$, $\forall n = 1, 2 \ldots$

Atunci orice șir dat de (3.3) *este mărginit.*

Demonstrație. Deoarece A este coerciv urmează că $R(A) = H$ (conform Teoremei 1.5, Cap. *I*). Prin urmare mulțimea $F = A^{-1}(0)$ este nevidă.

Făcînd schimbarea $u_n = x_n - f_n$ sistemul (3.3) devine

$$(3.36) \qquad u_{n-1} + f_{n-1} \in u_n + c_n A(u_n), \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$u_0 = x;\ f_0 = 0.$$

Din (3.36) obținem $\|u_n - p\|^2 \leqslant (u_n - p,\ u_{n-1} - p) + (f_{n-1},\ u_n - p)$, $\forall n = 1, 2 \ldots$, $\forall p \in A^{-1}(0)$. Prin urmare

$$(3.37) \qquad \|u_n\| \leqslant \|u_{n-1}\| + C + 2\ \mathrm{dist}\ (0, F), \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece A satisface (3.34) există o constantă $K > 0$ astfel încît

(3.38) $$\forall [\xi, \eta] \in A,\ \|\xi\| > K \Rightarrow (\xi, \eta)/\|\xi\| \geqslant C/\varepsilon.$$

Presupunem că există k natural astfel încît $\|u_k\| > K$. Înmulţind (3.36) (în care luăm $n = k$) cu $(1/\|u_k\|)u_k$ şi folosind (3.35) şi (3.38) obţinem că $\|u_k\| \leqslant \|u_{k-1}\|$. Prin urmare, ţinînd cont şi de (3.37) avem

(3.39) $$\|u_n\| \leqslant \max(K + C + 2\ \mathrm{dist}(0, F),\ \|u_{n-1}\|),\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Notînd $\rho_n = \max\ (K + C + 2\ \mathrm{dist}\ (0, F),\ \|u_n\|)$, rezultă din (3.39) că $\rho_n \leqslant \rho_{n-1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Prin urmare

$$\|x_n\| \leqslant \|u_n\| + C \leqslant \rho_n + C \leqslant \max(K + C + 2\ \mathrm{dist}(0, F), \|x\|) + C,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Teorema 3.6. (Autorul [4]). *Fie $\{x_n\}$ şirul generat de (3.3), unde $A = \partial\varphi$, $A^{-1}(0) \neq \emptyset$, $\{\|f_n\|\} \in l^2$, x este arbitrar în H şi, în plus, există $\varepsilon > 0$ astfel încît $c_n \geqslant \varepsilon > 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Atunci, dacă $\{x_n\}$ este mărginit, avem* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n - f_n) = \inf\limits_{z} \varphi(z)$.

Demonstraţie. La fel ca în demonstraţia teoremei precedente facem notaţia $u_n = x_n - f_n$ şi atunci (3.3) se scrie în forma (3.36). Înmulţind apoi (3.36) cu $u_n - u_{n-1}$ se obţine

$$\|u_n - u_{n-1}\|^2 + c_n(\varphi(u_n) - \varphi(u_{n-1})) \leqslant (f_{n-1}, u_n - u_{n-1}),\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Deci $(1/c_n)\|u_n - u_{n-1}\|^2 + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n-1}) \leqslant (1/2c_n)\|u_n - u_{n-1}\|^2 + (1/2c_n)\|f_{n-1}\|^2$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Prin urmare

(3.40) $$(1/2c_n)\|u_n - u_{n-1}\|^2 + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n-1}) \leqslant (1/2\varepsilon)\|f_{n-1}\|^2,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

de unde se deduce că

(3.41) $$\varphi(u_n) - (1/2\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-1}\|f_i\|^2 = \varphi(u_{n-1}) - (1/2\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-2}\|f_i\|^2,\ \forall n = 2, 3, \ldots$$

Deoarece $\inf\limits_{z} \varphi(z) = \varphi(p) > -\infty$, $\forall p \in A^{-1}(0)$ şi $\{\|f_n\|\} \in l^2$ urmează, conform cu (3.40) (sau (3.41)), că $\{\varphi(u_n)\}$ este un şir mărginit. Mai mult, datorită relaţiei (3.41) există limita şirului $\{\varphi(u_n) - (1/2\varepsilon)\sum_1^{n-1}\|f_i\|^2\}$. Deci, există de asemenea

(3.42) $$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = l \in \mathbf{R}.$$

Folosind acum (3.40) şi (3.42) se obţine

(3.42) $$\lim_{n\to\infty} c_n^{-1/2}\|u_n - u_{n-1}\| = 0.$$

Ţinînd cont de (3.43) şi trecînd la limită în (3.36) se deduce existenţa unui şir $z_n \to 0$ (tare în H) cu $z_n \in A(u_n)$, $\forall n$. Pe de altă parte avem $0 \leqslant \varphi(u_n) - \varphi(p) \leqslant (z_n, u_n - p)$, $\forall p \in A^{-1}(0)$. Întrucît $\{x_n\}$ a fost presupus mărginit la fel este şirul $\{u_n\}$ şi prin urmare trecînd la limită în ultima inegalitate se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \inf\limits_{z} \varphi(z)$ adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat. ■

Scanned with OKEN Scanner

Observația 3.6. Mărginirea șirului $\{x_n\}$ este o condiție esențială în Teorema 3.6 (vezi de exemplu Observația 3.5). Pentru a avea această mărginire sînt necesare condiții suplimentare, ca de exemplu (vezi (3.42)) coercivitatea funcției φ: $\lim_{\|u\|\to\infty} \varphi(u) = +\infty$.

În altă ordine de idei, dacă în Teorema 3.6 se mai presupune că $A^{-1}(0)$ conține un singur element, să zicem p, atunci evident $x_n \to p$, $\forall x \in H$.

Vom încheia această secțiune cu un rezultat care poate fi considerat ca analogul discret al Teoremei 1.9.

Teorema 3.7. (S. Reich [4]). *Presupunem că* $A : D(A) \subset H \to H$ *este maximal monoton și că ipotezele* (3.5) *și* (3.6) *sînt din nou verificate. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1} x_n = -a^0, \quad \forall x \in H, \tag{3.44}$$

unde $\{x_n\}$ *este șirul generat de* (3.3) *iar* a^0 *este elementul de normă minimă al mulțimii* $\overline{R(A)}$.

Demonstrație. Evident, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $y \in D(A)$ și $z \in A(y)$ astfel încît

$$\|z\| \leqslant \|a^0\| + \varepsilon. \tag{3.45}$$

Dacă $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sînt șirurile generate de (3.3), respectiv (3.2) corespunzătoare aceluiași punct de plecare x, atunci, evident, $\|x_n - y_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\| < +\infty$, ceea ce arată că pentru a dovedi (3.44) este suficient să considerăm cazul erorilor nule, adică să dovedim (3.44) pentru $\{y_n\}$. Mai considerăm șirul $\{\bar{y}_n\}$ generat de (3.2) cu y drept punct de plecare. Atunci avem $\|y_n - x\| \leqslant \|y_n - \bar{y}_n\| + \|\bar{y}_n - y\| + \|y - x\| \leqslant 2\|x - y\| + \sum_{i=1}^{n} c_i \|A_{c_i}(\bar{y}_{i-1})\|$, unde A_λ reprezintă aproximanta Yosida asociată lui A. Prin urmare, ținînd seama și de (3.45), avem $\|y_n - x\| \leqslant 2\|x - y\| + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) \|A^0(y)\| \leqslant 2\|x - y\| + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)(\|a^0\| + \varepsilon)$ ceea ce implică

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\|y_n - x\| \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_i\right) \leqslant \|a^0\|. \tag{3.46}$$

Pe de altă parte, deoarece pentru fiecare $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{x - y_n}{\sum_{i=1}^{n} c_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i A_{c_i}(y_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \in \operatorname{co} R(A) \subset \overline{R(A)} \tag{3.47}$$

avem de asemenea

$$\left(\|x - y_n\| \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_i\right) \geqslant \|a^0\|, \quad \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3.48}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile (3.46) şi (3.48) arată că

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_i = \|a^0\|. \tag{3.49}$$

În fine, (3.47) şi (3.49) conduc imediat la (3.44). Într-adevăr, făcînd notaţia $\xi_n = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1}, (x - y_n) n = 1, 2, \ldots$ obţinem

$$\limsup_{n\to\infty} \|\xi_n - a^0\|^2 = 2\|a^0\|^2 - 2 \liminf_{n\to\infty} (\xi_n, a^0) = 2(a^0, a^0 - \xi), \tag{3.50}$$

unde ξ este limita slabă a unui subşir al şirului $\{\xi_n\}$. Deoarece $\overline{R(A)}$ este o mulţime convexă şi închisă rezultă că $\overline{R(A)}$ este slab închisă deci, în virtutea lui (3.47), $\xi \in \overline{R(A)}$. Astfel, ţinînd cont că $a^0 = \text{Proi}_{\overline{R(A)}} 0$, avem că $(a^0, a^0 - \xi) \leqslant 0$. Acest fapt împreună cu (3.50) arată că $\xi_n \to a^0$, adică (3.44) este dovedită. ■

3.2. Scheme cu diferenţe finite de ordinul doi

În continuare ne vom ocupa de schene cu diferenţe finite de ordinul doi şi vom stabili un rezultat de convergenţă analog Teoremei 1.6, (I_3) din cazul continuu.

În redactarea acestei secţiuni s-a folosit lucrarea [5] a autorului.

Existenţa soluţiei pentru schema cu diferenţe de ordinul întîi din secţiunea precedentă era o consecinţă imediată a maximalităţii operatorului A. Pentru schema cu diferenţe finite de ordinul doi pe care o considerăm mai jos existenţa nu mai rezultă în mod banal, de aceea vom stabili mai întîi două rezultate de existenţă.

Teorema 3.8. (Autorul [5]). *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton, $\{c_n\}$ un şir conţinut în $]0, +\infty[$ şi x, y nişte elemente date în H. Atunci, pentru orice număr natural N, există un N-vector unic $U^N = (u_1^N, u_2^N, \ldots, u_N^N)$ aparţinînd spaţiului H^N astfel încît $u_i^N \in D(A), \forall i = 1, 2, \ldots, N$ şi U^N verifică următorul sistem de ecuaţii cu diferenţe finite*

$$\begin{cases} u_{i+1}^N - 2u_i^N + u_{i-1}^N \in c_i A(u_i^N), & i = 1, 2, \ldots, N \\ u_0^N = x, \quad u_{N+1}^N = y. \end{cases} \tag{3.51}$$

Menţionăm că prin H^N am notat spaţiul produs $H \times H \times \ldots \times H$. (cu N factori) dotat cu produsul scalar uzual şi norma „euclidiană" asociată.

Teorema 3.9. (Autorul [5]). *Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton cu $F = A^{-1}(0)$ nevidă, $\{c_n\} \subset]0, +\infty[$ şi x un element dat în H Atunci există un şir unic $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ astfel încît $\{u_n\}$ este mărginit şi satisface următorul sistem de ecuaţii cu diferenţe finite*

$$\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \in c_n A(u_n), & n = 1, 2, \ldots \\ u_0 = x. \end{cases} \tag{3.52}$$

Pentru simplitatea scrierii vom presupune în demonstraţiile Teoremelor 3.8 şi 3.9 că A este univoc.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația Teoremei 3.8. Începem prin a defini operatorii $A^N : D(A)^N \to H^N$ și $B^N : H^N \to H^N$ astfel

$$A^N(U^N) = (c_1 A(u_1^N),\ c_2 A(u_2^N),\ \ldots,\ c_N A(u_N^N)) + U_0^N,$$

$$B^N(U^N) = (2u_1^N - u_2^N,\ -u_1^N + 2u_2^N - u_3^N,\ -u_2^N + 2u_3^N - u_4^N,\ \ldots,$$

$$-u_{N-2}^N + 2u_{N-1}^N - u_N^N,\ -u_{N-1}^N + 2u_N^N),$$

unde $U^N = (u_1^N, u_2^N, \ldots, u_N^N)$ și $U_0^N = (x, 0, \ldots, 0, y)$. Este simplu de verificat că A^N astfel definit este maximal monoton iar B^N este peste tot definit pe H^N, liniar, continuu și monoton. Prin urmare (vezi Teoremele 1.4, 1.6 și Obs. 1.3, Cap. I) $A^N + B^N$ este de asemenea maximal monoton. Cu notațiile de mai sus este clar că sistemul (3.51) poate fi scris sub forma următoare

$$A^N(U^N) + B^N(U^N) \ni 0^N, \tag{3.53}$$

unde 0^N este elementul nul în spațiul H^N. Vom demonstra acum că B^N este tare pozitiv, adică există $a_N > 0$ astfel încît

$$(B^N(U^N),\ U^N)_N \geqslant a_N \| U^N \|_N^2,\ \forall U^N \in H^N, \tag{3.54}$$

unde $(\cdot,\cdot)_N$ și $\|\cdot\|_N$ reprezintă produsul scalar și respectiv norma lui H^N. Evident, avem $(B^N(U^N),\ U^N)_N = 2\sum_{i=1}^{N} \|u_i^N\|^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} (u_i^N,\ u_{i+1}^N)$.

Pe de altă parte, pentru orice $b_i > 0$ se poate scrie

$$2(u_i^N,\ u_{i+1}^N) < b_i \|u_i^N\|^2 + (1/b_i)\|u_{i+1}^N\|^2,\quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

care implică

$$2\sum_{i=1}^{N-1} (u_i^N,\ u_{i+1}^N) < b_1 \|u_1^N\|^2 + \sum_{i=1}^{N-2} (b_{i+1} + 1/b_i)\|u_{i+1}^N\|^2 + (1/b_{N-1})\|u_N^N\|^2.$$

Prin urmare pentru a obține (3.54) este suficient să găsim niște numere b_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, astfel încît

$$b_1 < 2,\ 1/b_{N-1} < 2,$$

$$b_{i+1} + 1/b_i < 2,\quad i = 1, 2, \ldots, N-2.$$

Asemenea numere există. De exemplu, putem alege $b_i = (1+i)^2/i(i+2)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Prin urmare (3.54) are loc. Evident $A^N + B^N$ este coerciv, deci $R(A^N + B^N) = H^N$ (vezi Teorema 1.5, Cap. I). În concluzie (3.51) are o soluție. Unicitatea soluției este o consecință a relației (3.54). Cu aceasta Teorema 2.7 este complet demonstrată. ■

Demonstrația Teoremei 3.9. Considerăm șirul de probleme

$$\begin{cases} u_{i+1}^N - 2u_i^N + u_{i-1}^N \in c_i A(u_i^N), & i = 1, 2, \ldots, N, \\ u_{N+1}^N = u_0^N = x. \end{cases} \tag{3.55}$$

Fie p un element arbitrar în $F = A^{-1}(0)$ și să notăm $y_i^N = u_i^N - p$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$.

Înmulțind $(3.55)_1$ cu y_i^N se obține

$$(y_{i+1}^N - 2y_i^N + y_{i-1}^N,\ y_i^N) \geqslant 0,\quad \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.56}$$

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea (3.56) conduce la următoarea inegalitate

$$\|y_i^N\| \leqslant (1/2)\,(\|y_{i-1}^N\| + \|y_{i+1}^N\|),\ \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.57}$$

Deoarece $y_0^N = y_{N+1}^N = x - p$ este ușor de arătat că

$$\|y_i^N\| \leqslant \|x - p\|, \text{ pentru orice } N \text{ și orice } i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.58}$$

Relația (3.56) se mai scrie sub forma $\|y_i^N - y_{i-1}^N\|^2 \leqslant (y_{i+1}^N - y_i^N, y_i^N) - (y_i^N - y_{i-1}^N, y_{i-1}^N)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$, care prin sumare conduce la

$$\sum_{i=1}^{N} \|u_i^N - u_{i-1}^N\|^2 \leqslant 3\,\|x - p\|^2. \tag{3.59}$$

Să considerăm acum $N_0 < N' < N$ și să notăm $z_i = u_i^N - u_i^{N'}$, $i = 0, 1, \ldots, N' + 1$.

Evident z_i depind de N și N' dar, pentru simplitatea scrierii, renunțăm la acești indici. Din (3.55) obținem :

$$(z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}, z_i) \geqslant 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N', \tag{3.60}$$

și, după niște rearanjări, (3.60) devine

$$\|z_i - z_{i-1}\|^2 \leqslant (z_{i+1} - z_i, z_i) - (z_i - z_{i-1}, z_{i-1}), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N'. \tag{3.61}$$

Deoarece $\|z_k\| = \sum_{i=1}^{k} (\|z_i\| - \|z_{i-1}\|) \leqslant k^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} \|z_i - z_{i-1}\|^2 \right)^{1/2}$, $\forall k = 1, 2, \ldots, N'$, se poate scrie, folosind (3.61), că $\|z_k\|^2 \leqslant k(z_{k+1} - z_k, z_k) \leqslant (1/2)\,k(\|z_{k+1}\|^2 - \|z_k\|^2)$, $\forall k = 1, 2, \ldots, N'$, și aceasta din urmă implică

$$\sum_{k=N_0}^{N'} (1/k)\,\|u_k^N - u_k^{N'}\|^2 \leqslant (1/2)\,\|u_{N'+1}^N - x\|^2 \leqslant 2\|x - p\|^2. \tag{3.62}$$

Din (3.61) se obține $(z_{j+1} - z_j, z_j) \geqslant 0$, $\forall j = 1, 2, \ldots, N'$. Prin urmare șirul $\{\|z_j\|\}$ este crescător. Acest fapt asociat cu (3.62) implică

$$\|u_i^N - u_i^{N'}\| \leqslant \sqrt{2}\ \operatorname{dist}(x, F) \left\{ \sum_{k=N_0}^{N'} (1/k) \right\}^{-1/2}, \forall i = 1, 2, \ldots, N_0. \tag{3.63}$$

Astfel, există

$$\lim_{N \to \infty} u_i^N = u_i, \text{ uniform în raport cu } i \text{ din mulțimi finite.} \tag{3.64}$$

Folosind (3.64) și faptul că A este închis se poate trece la limită în (3.55), pentru $N \to \infty$ și se obține că șirul $\{u_n\}$ verifică sistemul (3.52). Din (3.58) rezultă că $\{u_n\}$ este mărginit. Acum, vom demonstra că $\{u_n\}$ este unica soluție mărginită pentru sistemul (3.52). Fie $\{v_n\}$ orice alt șir mărgint satisfăcînd (3.52). Notînd $q_n = u_n - v_n$ găsim că $q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1} \in c_i(A(u_i) - A(v_i))$, $i = 1, 2, \ldots$, de unde

$$\|q_i\| \leqslant (1/2)\,(\|q_{i-1}\| + \|q_{i+1}\|), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3.65}$$

Dar $\{q_i\}$ este mărginit astfel încît (3.65) ne spune că $\{\|q_i\|\}$ este descrescător. Observînd că $q_0 = 0$ încheiem cu constatarea că $u_i = v_i$,

Scanned with OKEN Scanner

$i = 1,2, \ldots$. Se mai poate remarca că în (3.55) am fi putut lua $u_{N+1}^N = y_N$ în loc de $u_{N+1}^N = x$, cu $\{y_n\}$ un șir mărginit și demonstrația ar fi decurs la fel ca mai sus. ■

Observația 3.7. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton cu $0 \in A(0)$ și mai presupunem că $c_n \geqslant k_0 > 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Pe spațiul $l^2(H) = \left\{\{u_n\} \subset H ; \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty\right\}$ definim operatorii A_2 și B_2 astfel

$$A_2(\{u_n\}) = \{c_n A(u_n)\}, \ \{u_n\} \subset D(A), \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$B_2(\{u_n\}) = \{-u_{n-1} + 2u_n - u_{n-1}\}, \text{ unde } u_0 = x.$$

Se constată ușor că A_2 este maximal monoton, B_2 este peste tot definit pe $l^2(H)$, continuu și monoton, prin urmare $A_2 + B_2$ este maximal monoton. Dar B_2 nu este coerciv.

Presupunînd, spre exemplu, că A este tare monoton rezultă în particular că A_2 este coerciv, deci sistemul cu diferențe neomogen

$$\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \in c_n A(u_n) + f_n, & n = 1, 2, \ldots . \\ u_0 = x \end{cases}$$

admite o soluție unică $\{u_n\} \in l^2(H)$, pentru orice $\{f_n\} \in l^2(H)$ și orice $x \in H$.

Teorema 3.10. (Autorul [5]). *Considerăm îndeplinite condițiile Teoremei* 3.9 *și presupunem în plus că există* $k_0 > 0$ *astfel încît* $c_n \geqslant k_0$, $\forall n = 1,2, \ldots$ *Atunci, există* $p \in F = A^{-1}(0)$ *astfel încît*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = p, \quad \textit{slab în } H, \tag{3.66}$$

unde $\{u_n\}$ este unica soluție mărginită a lui (3.52).

Demonstrație. Trecînd la limită în (3.57), pentru $N \to \infty$, se obține

$$\|u_i - p\| \leqslant (1/2)\,(\|u_{i-1} - p\| + \|u_{i+1} - p\|), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.67}$$

unde p este arbitrar în F. Deoarece $\{u_n\}$ este mărginit, (3.67) implică faptul că șirul $\{\|u_n - p\|\}$ este monoton descrescător, pentru orice $p \in F$. Prin urmare, există

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\| = \rho(p) \ \forall \ p \in F \tag{3.68}$$

Din relația (3.59) se deduce

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i - u_{i-1}\|^2 \leqslant 3\ (\text{dist}\ (x, F))^2, \tag{3.69}$$

astfel că, în particular, $\lim_{n\to\infty} (u_n - u_{n-1}) = 0$. Trecînd la limită în $(3.52)_1$ și ținînd cont că A este demiînchis se deduce că limita slabă a oricărui subșir slab convergent al șirului $\{u_n\}$ este conținută în F. Acest fapt împreună cu (3.68) implică (3.66) (conform lemei lui Opial). Astfel demonstrația este terminată. ■

Observația 3.8. Inegalitatea (3.69) este o informație asupra ratei (vitezei) de convergență a șirului $\{u_n\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 3.9. Pentru simplitatea scrierii presupunem în continuare că A este univoc. Să mai presupunem, în plus față de condițiile Teoremei 3.9, că există $a > 0$ astfel încît

$$\|A(v) - A(w)\| \geqslant a\|v - w\|, \quad \forall v, w \in D(A) \tag{3.70}$$

și $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = +\infty$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} u_n = p, \quad \text{tare în } H, \tag{3.71}$$

unde p este unicul element al mulțimii $A^{-1}(0)$. Într-adevăr, din (3.52) și (3.70) rezultă că $\|u_{n+1} - p\|^2 + 2(u_{n+1} - p, u_{n-1} - p) + \|u_{n-1} - p\|^2 \geqslant a^2c_n^2\|u_n - p\|^2 + 4\|u_n - p\|^2$ și deoarece $\{\|u_n - p\|\}$ este un șir descrescător avem $\|u_n - p\| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + a^2c_i^2/3)^{-1/2}\|x - p\|$ inegalitate care implică evident (3.71).

Observația 3.10. Presupunem acum (în plus față de condițiile Teoremei 3.9) că există $a > 0$ astfel ca

$$(A(v) - A(w), v - w) \geqslant a\|v - w\|^2, \quad \forall v, w \in D(A)$$

și $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = +\infty$. Atunci (3.71) este din nou satisfăcută deoarece în acest caz $\|u_n - p\| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + ac_i)^{-1/2}\|x - p\|$.

Observația 3.11. Presupunem îndeplinite condițiile Teoremei 3.10 și în plus, $\forall\lambda > 0$ (echivalent, pentru un $\lambda > 0$), operatorul $(I + \lambda A)^{-1}$ este compact de la H în H. Atunci (3.66) are loc chiar în topologia tare a lui H. Într-adevăr, din (3.69) și condiția $c_n \geqslant k_0 > 0$, $\forall n$ natural, rezultă că $(1/c_n)(u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1}) \to 0$, pentru $n \to \infty$, iar din (3.52) avem

$$u_n = (I + \lambda A)^{-1}(u_n + (\lambda/c_n)(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})), \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

adică $\{u_n\}$ este relativ compactă în H. Prin urmare, (3.66) este satisfăcută în topologia tare a lui H.

Observația 3.12. Teoremele 3.8 și 3.9 asigură doar existența soluțiilor pentru schemele cu diferențe de ordinul doi menționate. Pentru a construi aceste soluții se poate folosi algoritmul punctului proxim dat de schema cu diferențe finite de ordinul întîi descrisă în secțiunea precedentă. Într-adevăr, aplicarea acestui algoritm în care operatorul A este acum $A^N + B^N$ ne ajută să construim o soluție aproximativă pentru (3.51). Pe de altă parte, din (3.63) se obține estimarea

$$\|u_i^N - u_i\| \leqslant \text{Const.}\left(\sum_{k=N_0}^{N}(1/k)\right)^{-1/2}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N_0, \tag{3.72}$$

deci soluțiile sistemelor (3.51) aproximează (pentru N suficient de mare) unica soluție mărginită a sistemului (3.52). În fine, să remarcăm că dacă $c_n \geqslant k_0 > 0$, $\forall n$ natural, atunci din (3.66) și (3.72) rezultă că dacă N_0 este suficient de mare și N depășește cu mult pe N_0, atunci $u_{N_0}^N$ aproximează o soluție a ecuației $0 \in A(u)$.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 3.13. Dacă $A = \partial\varphi$, unde $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ este o funcție proprie, convexă și inferior semicontinuă, atunci soluția U^N pentru (3.51) este tocmai soluția următoarei probleme de optimizare :

Să se minimizeze funcționala $F^N(V^N) = (1/2)\sum_{i=0}^{N} \| v_{i+1}^N - v_i^N \|^2 + \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi(v_i^N)$ pe mulțimea N-vectorilor $V^N = (v_1^N, v_2^N, \ldots, v_N^N) \in H^N$, unde $v_0^N = x$, $v_{N+1}^N = y$.

Să presupunem în plus că φ are cel puțin un punct de minim și $\varphi \geqslant 0$. Atunci soluția $\{u_n\}$ pentru (3.52) este soluția optimală a problemei :

Să se minimizeze funcționala $F(v_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (2^{-1} \| v_i - v_{i-1} \|^2 + c_i \varphi(v_i))$, în clasa șirurilor mărginite $\{v_n\} \subset H$ cu $v_0 = x$.

§ 4. COMPORTAREA LA INFINIT A SOLUȚIILOR ÎN CAZUL FORȚĂRII PERIODICE. PROBLEMA DOZĂRII ASIMPTOTICE

4.1. Forțarea periodică

Considerăm din nou ecuația neomogenă

$$\text{(E)} \qquad \frac{du}{dt} + A(u) \ni f(t), \qquad t > 0.$$

Să enunțăm principalul rezultat al acestui paragraf.

Teorema 4.1. *Presupunem că* $A = \partial\varphi(\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ *proprie, convexă și semicontinuă inferior),* $f \in L^2_{loc}([0, +\infty[; H)$ *și* f *este* T *periodică,* $T > 0$. *Atunci ecuația* (E) *are o soluție mărginită pe* $[0, +\infty[$ *dacă și numai dacă* (E) *are cel puțin o soluție* T*-periodică* ω (*adică* $\omega(0) = \omega(T)$). *În acest caz toate soluțiile ecuației* (E) *sînt mărginite pe* $[0, +\infty[$ *și pentru orice soluție* $u(t)$, $t \geqslant 0$, *există o soluție* T*-periodică* ω^* *pentru* (E) *astfel încît*

$$\text{(4.1)} \qquad u(t) - \omega^*(t) \to 0, \text{ în } H, \text{ pentru } t \to \infty.$$

Mai mult ω^* *diferă de orice altă soluție periodică* ω *printr-o constantă additivă și*

$$\text{(4.2)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{d\omega}{dt}(t) \right\|^2 dt = 0,$$

unde $u_n(t) = u(t + nT)$, $n = 1, 2, \ldots$

Vom demonstra mai întîi un rezultat auxiliar :

Lema 4.1. *Fie* $A : D(A) \subset H \to H$ *maximal monoton, verificînd condiția*

$$\text{(4.3)} \qquad \exists \sigma > 0 \text{ astfel încît } (A(x) - A(z),\ z - y) \leqslant \sigma(A(x) - A(y),\ x - y),\ \forall x, y, z \in D(A).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă

$$\text{(4.4)}\qquad \begin{cases} f_k \in A(u_k),\ g \in A(v),\ f_k \to f,\ u_k \to u \ \text{și} \\ \lim\limits_{k\to\infty} (f_k - g,\ u_k - v) = 0, \end{cases}$$

atunci $f \in A(v)$ *și* $g \in A(u)$.

În condiția (4.3) $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$ semnifică elemente arbitrare din fiecare din aceste mulțimi.

Demonstrație. Luînd în (4.3) $x = u_k$ și $y = v$ obținem $(f_k - A(z),\ z - v) \leqslant \sigma(f_k - g,\ u_k - v)$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall z \in D(A)$. Ținînd cont de (4.4) și trecînd la limită se obține $(f - A(z),\ z - v) \leqslant 0$, $\forall z \in D(A)$. Deoarece A este maximal monoton rezultă că $f \in A(v)$. Pe de altă parte, relația (4.3) este valabilă și pentru A^{-1}. Această observație arată că avem de asemenea $u \in A^{-1}(g)$ sau $g \in A(u)$. ■

Observația 4.1. Dacă A este trimonoton (în particular $A = \partial\varphi$), atunci (4.3) este îndeplinită cu $\sigma = 1$.

Demonstrația Teoremei 4.1. Dacă o soluție $u(t)$, $t \geqslant 0$, a ecuației (E) este mărginită pe $[0, +\infty[$, atunci orice altă soluție $v(t)$, $t \geqslant 0$, are această proprietate, deoarece $\|u(t) - v(t)\| \leqslant \|u(0) - v(0)\|$, $\forall t \geqslant 0$. Vom arăta acum că dacă soluțiile ecuației (E) sînt mărginite pe $\mathbf{R}_+$, atunci există cel puțin o soluție periodică pentru ecuația (E). Pentru aceasta să definim operatorul $Q : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$ astfel : $Q(x) = u(T;\ x)$, unde $u(t;\ x)$, $t \geqslant 0$, este soluția care pleacă din punctul $x \in \overline{D(A)}$. Evident Q este neexpansiv și pentru fiecare x șirul $\{Q^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ este mărginit, întrucît $Q^n(x) = Q^{n-1}(u(T;\ x)) = \ldots = u(nT;\ x)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Astfel, conform unei teoreme de punct fix a lui F. E. Browder și W. V. Petryshyn [1] operatorul Q admite un punct fix, adică există o soluție periodică ω pentru (E). Astfel, prima parte a teoremei este demonstrată. Fie acum $u(t)$, $t \geqslant 0$, o soluție mărginită pentru (E) și considerăm șirul de funcții $u_n(t) = u(t + nT)$, $n \in \mathbf{N}$, definite pe $[0,2T]$. Pentru a demonstra a doua parte a teoremei vom aplica lema lui Opial din Cap. 0 șirului $\{u_n\}$ în spațiul $\mathscr{H} = L^2(0,2T;\ H)$. Notăm cu F mulțimea soluțiilor T-periodice pentru (E). Orice $\omega \in F$ se poate prelungi prin periodicitate pe intervalul $[0,2T]$ astfel încît F poate fi privită ca o submulțime în $\mathscr{H}$. Să observăm mai întîi că

$$\text{(4.5)}\qquad \|u_n(t) - \omega(t)\| \leqslant \|u_n(0) - \omega(0)\| = \|u_{n-1}(T) - \omega(T)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|u_{n-1}(t) - \omega(t)\| \leqslant \|u_{n-1}(0) - \omega(0)\|,\quad \forall \omega \in F,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Prin urmare, există

$$\text{(4.6)}\qquad \lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - \omega(t)\| = l(\omega), \text{ uniform în raport cu } t \in [0,\ T].$$

În particular

$$\text{(4.7)}\qquad \|u_n - \omega\|_{\mathscr{H}} \to \sqrt{2T}\, l(\omega) = \rho(\omega),\quad \forall \omega \in F,$$

deci prima condiție din lema lui Opial este verificată. Fără a se restrînge generalitatea se poate presupune ca în demonstrația Teoremei 2.4 din

Scanned with OKEN Scanner

Cap. I că $\min_{x\in H} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$, unde $x_0 \in D(A)$. Atunci, conform estimării (2.41) din Cap. I, avem

$$(4.8)\qquad \int_0^{2T} t \left\| \frac{du_n}{dt}(t) \right\|^2 dt \leqslant \int_0^{2T} t \|f(t)\|^2 dt + 2(\|u_n(0) - x_0\| + \int_0^{2T} \|f(t)\| dt)^2 \leqslant \text{Const.}$$

Din (4.8) rezultă că $\int_T^{2T} t \left\| \frac{du_n}{dt}(t) \right\|^2 dt \leqslant$ Const., adică

$$(4.9)\qquad \{du_n/dt\}_{n=1}^{\infty} \text{ este un șir mărginit în } \mathcal{H}.$$

Pentru a arăta că este îndeplinită a doua condiție din lema lui Opial fie $\{u_{n_k}\}$ un subșir al șirului $\{u_n\}$ slab convergent în $\mathcal{H}$, să zicem la $u^* \in \mathcal{H}$. De fapt, convergența are loc în topologia slab stelată a spațiului $L^\infty(0,2T;H)$ și deci $u^* \in L^\infty(0,2T;H)$, deoarece $\{u_n\}$ este mărginit în acest spațiu. Datorită condiției (4.9) $du^*/dt \in \mathcal{H}$ și

$$(4.10)\qquad du_{n_k}/dt \to du^*dt, \text{ în } \mathcal{H}, \text{ pentru } k \to \infty.$$

Fie $\bar{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ extensia canonică a operatorului A la $\mathcal{H}$. Conform Propoziției 1.5 din Cap. I, $\bar{A} = \partial\Phi$, unde $\Phi : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ este definită prin

$$\Phi(v) = \begin{cases} \int_0^{2T} \varphi(v(t))\, dt, & \text{dacă } \varphi \circ v \in L^1(0,2T) \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Pe de altă parte, pentru orice $\omega \in F$, avem

$$(4.11)\qquad \left(\left(f - \frac{du_n}{dt}\right) - \left(f - \frac{d\omega}{dt}\right),\ u_n - \omega\right)_{\mathcal{H}} =$$

$$= \frac{1}{2}\|u_n(0) - \omega(0)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n(2T) - \omega(2T)\|^2 \to 0, \text{ pentru } n \to \infty,$$

datorită relației (4.6). Am notat cu $(.,.)_{\mathcal{H}}$ produsul scalar uzual în $\mathcal{H}$. Astfel se poate aplica Lema 4.1 în spațiul $\mathcal{H}$ cu $f_k := f - du_{n_k}/dt \in \bar{A}(u_{n_k})$, $g := f - d\omega/dt \in \bar{A}(\omega)$.

Rezultă atunci că

$$(4.12)\qquad f - du^*/dt \in \bar{A}(\omega) \text{ și } f - d\omega/dt \in \bar{A}(u^*).$$

Astfel, ținînd cont de Lema 2.2 din Cap. I, avem

$$(4.13)\qquad \frac{d}{dt}\varphi(u^*) = \left(f - \frac{d\omega}{dt}, \frac{du^*}{dt}\right) \text{ și}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(\omega) = \left(f - \frac{du^*}{dt}, \frac{d\omega}{dt}\right) = \left(f - \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\omega}{dt}\right), \text{ a.p.t. } t \in]0,2T[.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare

$$(4.14)\qquad 2T\varphi(u^*(2T)) - \int_0^{2T} \varphi(u^*)\,dt = \int_0^{2T} \left(f - \frac{d\omega}{dt}, \frac{du^*}{dt}\right) t\,dt =$$

$$= \int_0^{2T} \left\{\left(f, \frac{du^*}{dt}\right) + \left\|\frac{d\omega}{dt}\right\|^2 - 2\left(\frac{du^*}{dt}, \frac{d\omega}{dt}\right)\right\} t\,dt.$$

Pe de altă parte, folosind definiția subdiferențialei și faptul că u_{n_k} și ω sînt soluții pentru ecuația (E) obținem

$$\varphi(u_{n_k}(t)) - \varphi(\omega(t)) \leqslant \left(f(t) - \frac{du_{n_k}}{dt}(t),\ u_{n_k}(t) - \omega(t)\right),$$

$$\varphi(\omega(t)) - \varphi(u^*(t)) \leqslant \left(f(t) - \frac{d\omega}{dt}(t),\ \omega(t) - u^*(t)\right),$$

pentru orice k natural și a.p.t. $t \in]0{,}2\,T[$.

Adunînd ultimele două inegalități, integrînd de la 0 la $2T$ și trecînd apoi la limită se obține $\limsup_{k\to\infty} \Phi(u_{n_k}) \leqslant \Phi(u^*)$. Prin urmare, ținînd seama de faptul că Φ este semicontinuă inferior, există

$$(4.15)\qquad \lim_{k\to\infty} \Phi(u_{n_k}) = \Phi(u^*).$$

Mai departe, să observăm că

$$(4.16)\qquad 2T\ \varphi(u_n(2T)) - \Phi(u_n) = \int_0^{2T} \left(f - \frac{du_n}{dt}, \frac{du_n}{dt}\right) t\ dt,\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Scădem (4.16) (cu n_k în loc de n) din (4.14) și trecem apoi la limită, ținînd cont de (4.10) și (4.15):

$$(4.17)\qquad \limsup_{k\to\infty} \int_0^{2T} t \left\|\frac{du_{n_k}}{dt} - \frac{d\omega}{dt}\right\|^2 dt =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} 2T(\varphi(u^*(2T)) - \varphi(u_{n_k}(2T))).$$

Pe de altă parte,

$$(4.18)\qquad u_{n_k}(t) \to u^*(t), \text{ cînd } k \to \infty,\quad \forall t \in [0,2T].$$

Pentru a arăta (4.18) este suficient, datorită relației (4.10), să arătăm că $u_{n_k}(0) \to u^*(0)$. Dar acest fapt rezultă imediat întrucît $\int_0^T \left(\frac{du_n}{dt}, (T-t)x\right)dt =$ $= -T(u_n(0), x) + \int_0^T (u_n, x)\,dt$, $\forall x \in H$, $\forall n \in \mathbf{N}$, deci $T \lim_{k\to\infty} (u_{n_k}(0), x) =$ $= \int_0^T (u^*, x)\,dt - \int_0^T \left(\frac{du^*}{dt}, (T-t)\,x\right) dt = T(u^*(0), x)$, $\forall x \in H$. Folosind (4.17), (4.18) și semicontinuitatea inferioară a funcției φ se deduce că

$$(4.19)\qquad \lim_{k\to\infty} \int_0^{2T} t \left\|\frac{du_{n_k}}{dt} - \frac{d\omega}{dt}\right\|^2 dt = 0,$$

deci $du^*/dt = d\omega/dt$, $\forall \omega \in F$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, ținînd seama și de (4.12), $u^* \in F$. Mai mult, se vede că orice două soluții din F diferă printr-o constantă aditivă. Întrucît condițiile lemei lui Opial sînt îndeplinite înseamnă că există $\omega^* \in F$ astfel încît $u_n \rightharpoonup \omega^*$ în $\mathscr{H}$. De fapt, aceasta înseamnă că $u^* = \omega^*$ și tot ce am afirmat despre subșirul $\{u_{n_k}\}$ este adevărat pentru șirul $\{u_n\}$.

Astfel (4.19), cu u_n în loc de u_{n_k}, conduce imediat la concluzia (4.2) întrucît $T\int_0^T \left\| \frac{du_{n+1}}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt \leqslant \int_T^{2T} t \left\| \frac{du_n}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt$. În fine, afirmația (4.1) este o consecință a faptului că $u_n(t) \rightharpoonup \omega^*(t)$, pentru $n \to \infty$, uniform în raport cu $t \in [0, T]$. Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Observația 4.2. Dacă în Teorema 4.1 considerăm că $f \equiv 0$ și $(\partial\varphi)^{-1}(0) \neq \emptyset$ sau, echivalent, φ admite cel puțin un punct de minim, atunci funcția $\omega^*(t)$ care apare în (4.1) este T-periodică pentru orice $T > 0$ deci este o funcție constantă : $\omega^*(t) = p$, $t \geqslant 0$, $p \in (\partial\varphi)^{-1}(0)$. Astfel, se reobține un rezultat cunoscut.

Pe de altă parte, avînd în vedere Comentariul 2°, din § 1, Secțiunea 1.5, nu ne putem aștepta în general la convergența tare în (4.1). Pentru a obține convergența tare este suficient să presupunem, de exemplu, că, rezolventa $(I + \partial\varphi)^{-1}$ este compactă sau echivalent (conform Propoziție 2.7) că mulțimile $K_C = \{x \in H ; \|x\| \leqslant C, \varphi(x) \leqslant C\}$ sînt compacte, pentru orice $C > 0$. Este suficient să observăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ mulțimea $\{\varphi(u(t)) ; t \geqslant \varepsilon\}$ este mărginită. Într-adevăr, reluînd raționamentele din demonstrația Teoremei 4.1 găsim că $\lim_{n\to\infty} \int_0^\tau \varphi(u_n)\, dt = \int_0^\tau \varphi(\omega^*)\, dt$, $\forall \tau \in]0, T]$. Scăzînd apoi relațiile

$$\tau\varphi(\omega^*(\tau)) - \int_0^\tau \varphi(\omega^*)\, dt = \int_0^\tau t\left(f - \frac{d\omega^*}{dt}, \frac{d\omega^*}{dt}\right) dt,$$

$$\tau\varphi(u_n(\tau) - \int_0^\tau \varphi(u_n)\, dt = \int_0^\tau t\left(f - \frac{du_n}{dt}, \frac{du_n}{dt}\right) dt$$

și ținînd cont de (4.2) se obține că

(4.20) $\varphi(u_n(\tau)) \to \varphi(\omega^*(\tau))$, pentru $n \to \infty$,

uniform în raport cu $\tau \in [0, T]$.

Prin urmare $\varphi(u(t))$ este mărginită și uniform continuă pe $[\varepsilon, +\infty[$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

Teorema 4.2. *Presupunem că* $A = \partial\varphi$, $f \in L^2_{loc}(\mathbf{R}; H)$ *și* f *este* T*-periodică pe* $\mathbf{R}$, $T > 0$. *Atunci, orice soluție* $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$, *mărginită a ecuației* (E) (*considerată pe* $\mathbf{R}$) *este periodică cu perioada* T.

Demonstrație. Notăm $u_{-n}(t) = u(t - nT)$. Presupunerea că $u(t)$ este mărginită pe $\mathbf{R}$ arată că există măcar o soluție T-periodică ω a ecuației (E). Aplicînd raționamentul folosit în demonstrația Teoremei 4.1 pentru șirul $\{u_{-n} : [0, T] \to H\} \subset L^2(0, T; H)$, se poate trage concluzia că există o soluție T-periodică ω^* pentru ecuația (E) astfel încît $du_{-n}/dt \to$

Scanned with OKEN Scanner

$\to d\omega^*/dt$, tare în $L^2(0, T; H)$. În particular $\left\| \int_0^T \frac{du_{-n}}{dt}\, dt \right\| \to \left\| \int_0^T \frac{d\omega^*}{dt}\, dt \right\| =$ $= 0$. Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \| u(-nT) - u(T - nT) \| = 0. \tag{4.21}$$

Pe de altă parte, pentru orice $t \in \mathbf{R}$ și $n \geqslant -t/T$ avem

$$\| u(t + T) - u(t) \| \leqslant \| u(T - nT) - u(-nT) \|. \tag{4.22}$$

Astfel, (4.21) și (4.22) arată că $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$, este într-adevăr o soluție T-periodică. ■

Notă bibliografică. În redactarea acestei secțiuni am utilizat esențial lucrarea semnată de J. B. Baillon și A. Haraux [1]. Vezi, de asemenea, J. B. Baillon [1] și A. Haraux [2].

4.2. Problema dozării asimptotice

În această secțiune se studiază așa-numita problemă a dozării asimptotice pentru ecuații de evoluție de tip monoton. Pentru a formula această problemă, să considerăm următorul șir de probleme Cauchy notate cu (P_n):

$$(P_0)\begin{cases} \dfrac{du_0}{dt}(t) + A(u_0)) \ni f(t), & 0 < t < T \\ u_0(0) = x \end{cases}$$

$$(P_n)\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt}(t) + A(u_n(t)) \ni f(t), & nT < t < (n+1)T \\ u_n(nT) = u_{n-1}(nT) + d_n, & \text{pentru } n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

unde $A : D(A) \subset H \to H$ este un operator maximal monoton; $x \in \overline{D(A)}$ este un element fixat; $T > 0$ este un număr fixat; $\{d_n\}$ este un șir dat în spațiul H, care este presupus ca de obicei spațiu Hilbert real. La fel ca în secțiunea precedentă

$$f \in L^2_{loc}([0, +\infty[; H) \text{ și } f \text{ este } T\text{-periodică}. \tag{A_1}$$

Ca o primă observație, șirul $\{(P_n)\}_{n=0}^{\infty}$ este bine definit numai dacă fiecare dintre datele inițiale ale problemelor (P_n) aparține mulțimii $\overline{D(A)}$. Presupunerea

$$\overline{D(A)} = H, \tag{A_2}$$

pe care o admitem în continuare garantează cu siguranță acest fapt. Dacă, în plus,

(A_3) $A = \partial\varphi$, $\varphi : H \to]-\infty, \infty]$ proprie, convexă și inferior semicontinuă,

atunci (vezi Teorema 2.4 din Cap. I) fiecare din problemele (P_n) are soluție tare unică $u_n \in C([nT, (n+1)T]; H) \cap W^{1,2}(nT + \delta, nT + T; H)$, pentru orice $\delta \in]0, T[$ și $\sqrt{t}\, du_n/dt \in L^2(nT, nT + T; H)$. Vom mai pre-

supune că

(A_4) există $d \in H$, astfel încît $\sum_{n=1}^{\infty} \| d_n - d \| < +\infty$, și

(A_5) există cel puțin o soluție a problemei la limită

$$(4.23) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt}(t) + A(\omega(t)) \ni f(t), & \text{a.p.t. } t \in]0, T[\\ \omega(0) = \omega(T) + d. \end{cases}$$

Să definim acum funcția $u : [0, +\infty[\to H$ prin

$$(4.24) \qquad u(t) = \begin{cases} x, & \text{dacă } t = 0 \\ u_n(t), & \text{dacă } nT < t \leqslant (n+1)T, \ n = 0,1, \ldots \end{cases}$$

Evident u satisface ecuația (E), a.p.t. $t > 0$ și condițiile

$$(4.25) \qquad u(0) = x, \ u(nT^+) = u(nT^-) + d_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

unde $u(t_0^+)$, $u(t_0^-)$ semnifică limitele la dreapta și respectiv la stinga ale funcției $u(t)$ în punctul $t = t_0$.

Problema dozării asimptotice constă în găsirea unor condiții suficiente care să asigure convergența șirului de funcții $\{y_n : [0, T] \to H ; y_n(t) = u(t + nT)\}$, într-un anumit sens, la o soluție pentru (4.23). Menționăm că această problemă a mai fost considerată anterior de M. Turinici [1] pentru cazul spațiilor finit dimensionale. Metodele și condițiile folosite de noi aici sînt însă complet diferite. Se pare că asemenea probleme au fost puse în farmacologie. Într-adevăr, modificarea datei inițiale pentru ecuația (E) după fiecare interval de timp T, ar însemna modificarea bruscă a concentrației $u = u(t)$ a unei anumite substanțe dintr-un organism viu prin administrarea unui anumit medicament. Întrebarea naturală care se pune în acest caz este cum evoluează concentrația $u = u(t)$ în urma aplicării acestui proces de dozare, cînd timpul $t \to \infty$. De fapt noi studiem aici efectul combinat produs de dozare și de forțarea periodică exprimată prin termenul neomogen $f = f(t)$. Rezultatul principal al acestei secțiuni este

Teorema 4.3. *Să admitem că ipotezele* (A_1) ~ (A_5) *date mai sus sînt îndeplinite. Atunci*

$$(4.26) \qquad \sup_{t \geqslant 0} \| u(t) \| < +\infty$$

și există o soluție ω^* *pentru* (4.23) *astfel încît*

$$(4.27) \qquad y_n(t) = u(t + nT) \to \omega^*(t), \ \textit{cînd } n \to \infty, \ \textit{pentru } t \in]0, T]$$

și

$$(4.28) \qquad t^{3/4} \frac{dy_n}{dt} \to t^{3/4} \frac{d\omega^*}{dt}, \ \textit{cînd } n \to \infty, \ \textit{tare în } L^2(0, T; H).$$

In plus

$$(4.29) \qquad \varphi(y_n)(t)) \to \varphi(\omega^*(t)), \ \textit{cînd } n \to \infty, \ \textit{uniform pe } [\varepsilon, T],$$

pentru orice $\varepsilon \in]0, T[$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. În linii mari vom folosi ideile utilizate deja în demonstrația Teoremei 4.1. Astfel, vom nota prin F mulțimea soluțiilor problemei la limită (4.23). Ipoteza (A_5) ne spune tocmai că F este nevidă. În continuare, pentru $\forall \omega \in F$, avem

$$
\begin{aligned}
(4.30) \qquad \| y_n(t) - \omega(t) \| &\leqslant \| y_n(0^+) - \omega(0) \| \\
&\leqslant \| y_{n-1}(T) - \omega(T) \| + \| d_n - d \| \\
&\leqslant \| y_{n-1}(t) - \omega(t) \| + \| d_n - d \| \\
&\leqslant \| y_{n-1}(0^+) - \omega(0) \| + \| d_n - d \|,
\end{aligned}
$$

pentru orice $t \in]0, T]$, $n = 1,2, \ldots$

Astfel, ținînd cont de (A_4) se deduce în primul rînd că (4.26) este îndeplinită. Mai mult, (4.30) arată că pentru fiecare $t \in]0,T]$ șirul $\left\{ \| y_n(t) - \omega(t) \| - \sum_{i=1}^{n} \| d_i - d \| \right\}$ este monoton descrescător. Prin urmare, pentru fiecare $\omega \in F$, există o constantă $C_\omega > 0$ (independentă de t, datorită relației (4.30)), astfel încît

$$
\begin{aligned}
&\| y_n(t) - \omega(t) \| \to C_\omega, \quad \forall t \in]0, T] \text{ și} \\
&\| y_n(0^+) - \omega(0) \| \to C_\omega.
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Vom nota cu Y spațiul $L^2(0, T; H)$. Evident $F \subset Y$. Din (4.30) și (4.31) se obține în particular

$$
\| y_n - \omega \|_Y \to \sqrt{T}\, C_\omega, \quad \forall \omega \in F. \tag{4.32}
$$

Presupunem din nou fără a se restringe generalitatea că $\inf_{x \in H} \varphi(x) = \varphi(q) = 0$, $q \in D(A)$.

Vom scrie acum inegalitatea similară inegalității (4.8):

$$
\int_0^T t \left\| \frac{dy_n}{dt} \right\|^2 dt \leqslant \int_0^T t \| f(t) \|^2 dt + 2(\| y_n(0^+) - q \| + \int_0^T \| f(t) \| dt)^2. \tag{4.33}
$$

Fie $\{y_{n_k}\}$ un subșir arbitrar al șirului $\{y_n\}$ astfel încît $y_{n_k} \to y$, pentru $k \to \infty$, slab stelat în $L^\infty(0, T; H)$. Atunci, conform cu (4.33),

$$
\sqrt{t}\, \frac{dy_{n_k}}{dt} \xrightarrow[k \to \infty]{} \sqrt{t}\, \frac{dy}{dt}, \text{ slab în } Y. \tag{4.34}
$$

Mai mult

$$
y_{n_k}(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} y(t), \text{ slab în } H, \quad \forall\, t \in]0, T], \tag{4.35}
$$

deoarece $ty_n(t) = \int_0^t \left[s \frac{dy_n}{ds}(s) + y_n(s) \right] ds$, $\forall t \in]0, T]$. Să definim acum

funcţia $\Phi : Y \to]-\infty, +\infty]$ prin

$$\Phi(v) = \begin{cases} \int_0^T \sqrt{t}\,\varphi(v)\,dt, & \text{dacă } \sqrt{t}\,\varphi(v) \in L^1(0,T) \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Este uşor de arătat că Φ este proprie, convexă şi inferior semicontinuă şi avem : $w \in \partial\Phi(z) \Leftrightarrow w(t) \in \sqrt{t}A(z(t))$, a.p.t. $t \in]0, T[$. În continuare, să observăm că

$$0 \leqslant -\int_0^T \left(y_n - \omega,\ \sqrt{t}\,\frac{dy_n}{dt} - \sqrt{t}\,\frac{d\omega}{dt}\right) dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}\|y_n - \omega\|^2\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{T}\,\|y_n(T) - \omega(T)\|^2 + \frac{1}{4}\int_0^T t^{-1/2}\,\|y_n - \omega\|^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{T}\,(\|y_n(0^+) - \omega(0)\|^2 - \|y_n(T) - \omega(T)\|^2), \quad \forall \omega \in F.$$

Astfel, ţinînd cont şi de (4.30) se obţine că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \left(y_n - \omega,\ \sqrt{t}\left(f - \frac{dy_n}{dt}\right) - \sqrt{t}\left(f - \frac{d\omega}{dt}\right)\right) dt = 0, \quad \forall \omega \in F. \tag{4.36}$$

Prin urmare Lema 4.1 se poate aplica din nou, în spaţiul Y, cu $f_k := \sqrt{t}\left(f - \frac{dy_{n_k}}{dt}\right) \in \partial\Phi(y_{n_k})$ şi $g := \sqrt{t}\left(f - \frac{d\omega}{dt}\right) \in \partial\Phi(\omega)$. Se obţine astfel că $y \in D(\partial\Phi)$ şi

$$f - \frac{dy}{dt} \in A(\omega) \text{ şi } f - \frac{d\omega}{dt} \in A(y), \text{ a.p.t. } t \in]0, T[. \tag{4.37}$$

Deoarece $y \in W^{1,2}(\varepsilon, T; H)$, $\forall \varepsilon \in]0, T[$ conform Lemei 2.2 din Cap. I, funcţia $t \mapsto \varphi(y(t))$ este absolut continuă pe $[\varepsilon, T]$, $\forall \varepsilon \in]0, T[$ şi are loc formula de derivare

$$\frac{d}{dt}\varphi(y) = \left(f - \frac{d\omega}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \text{ a.p.t. } t \in]0, T[. \tag{4.38}$$

În continuare, folosind relaţiile (4.37) şi (4.38), se poate scrie

$$T^{3/2}\varphi(y(T)) - \frac{3}{2}\Phi(y) = \int_0^T t^{3/2}\left(f - \frac{d\omega}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \tag{4.39}$$

$$= \int_0^T t^{3/2}\left[\left(f, \frac{dy}{dt}\right) + \left\|\frac{d\omega}{dt}\right\|^2 - 2\left(\frac{dy}{dt}, \frac{d\omega}{dt}\right)\right] dt.$$

Pentru deducerea relaţiei (4.39) am folosit şi faptul că

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{3/2}\varphi(y(\varepsilon)) = 0. \tag{4.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, pentru $0 < s \leqslant t \leqslant T$ avem

$$t^{3/2}\varphi(y(t)) - s^{3/2}\varphi(y(s)) = \int_s^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\tau^{3/2}\varphi(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{3}{2}\int_s^t \sqrt{\tau}\,\varphi(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau + \int_s^t \tau^{3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\varphi(y(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

care implică (4.40), deoarece $y \in D(\partial\Phi) \subset D(\Phi)$ și $t^{3/2}(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\varphi(y) \in L^1(0,T)$ (vezi (4.38)).

Deoarece $\int_0^T \sqrt{t}(f - \mathrm{d}y_n/\mathrm{d}t),\ \omega - y_n)\,\mathrm{d}t \leqslant \Phi(\omega) - \Phi(y_n)$ și $\int_0^T \sqrt{t}(f - \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t,\ y - \omega)\,\mathrm{d}t \leqslant \Phi(y) - \Phi(\omega)$ se obține că

$$\int_0^T \sqrt{t}\left(f - \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},\ y - y_n\right)\mathrm{d}t + \int_0^T \sqrt{t}\left(\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},\ y_n - \omega\right)\mathrm{d}t \leqslant \Phi(y) - \Phi(y_n). \tag{4.41}$$

Combinînd relațiile (4.35), (4.36) și (4.41) se obține

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(y_{n_k}) = \Phi(y). \tag{4.42}$$

Pe de altă parte

$$T^{3/2}\varphi(y_n(T)) - (3/2)\Phi(y_n) = \int_0^T t^{3/2}\left(f - \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t. \tag{4.43}$$

Scăzînd (4.43) din (4.39) și folosind (printre altele) (4.42) vom găsi

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T t^{3/2}\left\|\frac{\mathrm{d}y_{n_k}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right\|^2 \mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty} T^{3/2}\left[\varphi(y(T)) - \varphi(y_{n_k}(T))\right] = 0. \tag{4.44}$$

Astfel, avînd în vedere și (4.34), $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, $\forall\omega \in F$, deci $y \in F$. Prin urmare, ținînd cont și de (4.32) se poate aplica din nou lema lui Opial care arată că există $\omega^* \in F$ astfel încît $y_n \to \omega^*$, slab stelat în $L^\infty(0, T; H)$. Astfel, concluziile (4.27) și (4.28) rezultă din faptele deja dovedite mai sus. Pentru a demonstra (4.29) să observăm mai întîi că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\tau \sqrt{t}\,\varphi(y_n)\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \sqrt{t}\,\varphi(\omega^*)\,\mathrm{d}t, \quad \forall\tau \in\ ]0,\ T], \tag{4.45}$$

fapt ce rezultă exact la fel ca în cazul $t = T$ (vezi (4.42)).

Scăzînd apoi relațiile

$$\tau^{3/2}\varphi(\omega^*(\tau)) - \frac{3}{2}\int_0^\tau \sqrt{t}\,\varphi(\omega^*)\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau t^{3/2}\left(f - \frac{\mathrm{d}\omega^*}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}\omega^*}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

$$\tau^{3/2}\varphi(y_n(\tau)) - \frac{3}{2}\int_0^\tau \sqrt{t}\,\varphi(y_n)\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau t^{3/2}\left(f - \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

și ținînd cont de (4.28) și (4.45) se obține concluzia (4.29). Cu aceasta demonstrația Teoremei 4.3 este terminată. ■

Scanned with OKEN Scanner

Observația 4.3. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ maximal monoton astfel încît $A - aI$ rămîne monoton pentru un $a > 0$. În plus, presupunem că ipotezele (A_1), (A_2) și (A_4) au loc. Ipoteza (A_5) este acum automat satisfăcută. Într-adevăr, dacă notăm cu $u_0(t\,;x)$ soluția problemei (P_0), atunci operatorul $\Gamma : H \to H$, definit prin $\Gamma(x) = u_0(T\,;x) + d$, este o contracție (cu constanta $\exp(-aT)$). Din teorema de punct fix a lui Banach se constată că există un punct fix unic pentru Γ, prin urmare problema (4.23) admite o soluție unică ω^*. Efectuînd un calcul simplu se deduce $\|y_n(t) - \omega^*(t)\| \leqslant \exp(-at)(\|y_{n-1}(t) - \omega^*(t)\| + \|d_n - d\|)$, $\forall t \in]0,\ T]$, de unde va rezulta

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n(t) - \omega^*(t)\| = 0, \quad \forall t \in]0,\ T]. \tag{4.46}$$

Să mai remarcăm că dacă $d_n = d$, $\forall n$, atunci

$$\|y_n(t) - \omega^*(t)\| \leqslant \exp(-nat)\,\|u_0(t) - \omega^*(t)\|, \quad \forall t \in]0,\ T]. \tag{4.47}$$

Să adăugăm că, exceptînd acest caz particular în care A este tare monoton, am eșuat în încercarea de a găsi condiții care să asigure existența soluțiilor pentru problema la limită (4.23). Aceasta rămîne o problemă deschisă.

Exemplu. Fie Ω o mulțime deschisă și mărginită în $\mathbf{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de regulată. Fie $\beta : D(\beta) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o aplicație multivocă maximal monotonă astfel încît $0 \in \beta(0)$. Astfel, conform Propoziției 1.3 din Cap. I, există o funcție $j : \mathbf{R} \to]-\infty,\ +\infty]$ proprie, convexă și semicontinuă inferior astfel încît $\beta = \partial j$. Să considerăm problema următoare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) \ni 0, & \text{pe }]0, +\infty[\times \Omega, \\ u(t,\ x) = 0, & \text{pe }]0, +\infty[\times \partial\Omega, \\ u(0;\ x) = u_0(x), & \text{pe } \Omega \end{cases} \tag{4.48}$$

Observația 4.4. Să amintim că operatorul Laplace $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ este tare pozitiv și autoadjunct, prin urmare $-\Delta$ este maximal monoton pe spațiul $H = L^2(\Omega)$ (vezi Propoziția 1.4 din Cap. I). Mai exact, $-\Delta$ este subdiferențiala funcției $\varphi_1 : H \to]-\infty,\ \infty]$ definite prin

$$\varphi_1(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \|\operatorname{grad} v(x)\|^2_{\mathbf{R}^N}\,dx, & \text{dacă } v \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Pe de altă parte (vezi Propoziția 1.5 din Cap. I), extensia canonică $\overline{\beta}$ a aplicației β la spațiul H este tocmai subdiferențiala funcției $\varphi_2 : H \to]-\infty,\ +\infty]$ definite prin

$$\varphi_2(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j(v(x))\,dx, & \text{dacă } j \circ v \in L^1(\Omega) \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mai mult, se poate arăta că operatorul $A = -\Delta + \overline{\beta}$ este maximal monoton pe H. Pentru aceasta este suficient să arătăm că

$$(4.49) \qquad (-\Delta v,\ \overline{\beta}_\lambda(v))_H = -\int_\Omega (\Delta v(x).\ \beta_\lambda(v(x)))\ dx \geqslant 0,$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ \lambda > 0.$$

Dacă $\gamma \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încît $\gamma' \geqslant 0$ și $\gamma(0) = 0$, atunci pentru $v \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ avem : $-\int_\Omega (\Delta v(x),\ \gamma(v(x)))\ dx = \int_\Omega \gamma'(v(x))\, \|\text{grad } v(x)\|^2_{\mathbf{R}^N}\, dx \geqslant 0$. Astfel, aproximînd pe β_λ cu funcții de tipul lui γ se obține (4.49) pentru $v \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. În particular (4.49) este adevărată dacă v se înlocuiește cu $v_\varepsilon = (I - \varepsilon\Delta)^{-m} v$, $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, unde m este natural suficient de mare. Întrucît $\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v}$, cînd $\varepsilon \to 0$, tare în H și β_λ este o funcție lipschitziană rezultă atunci, prin trecere la limită cînd $\varepsilon \to 0$, că (4.49) este verificată. Aunci, în virtutea Teoremei 1.7 din Cap. I, operatorul $A = -\Delta + \beta$ este într-adevăr maximal monoton. Mai exact, întrucît $-\Delta + \overline{\beta} \subset \partial(\varphi_1 + \varphi_2)$, putem afirma că $A = \partial\varphi$, unde $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ se definește prin $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, adică

$$\varphi(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \|\text{grad } v(x)\|^2_{\mathbf{R}^N}\, dx + \int_\Omega j(v(x))\, dx, \text{ dacă } v \in H_0^1(\Omega) \text{ și } j \circ v \in L^1(\Omega), \\ +\infty, \quad \text{în rest.} \end{cases}$$

De asemenea, procedînd ca în demonstrația Propoziției 1.5 din Cap. I, se poate arăta că

$$\overline{D(A)}^H = \overline{D(\varphi)}^H = \{v \in H = L^2(\Omega);\ v(x) \in \overline{D(j)} \text{ a.p.t. } x \in \Omega\}. \tag{4.50}$$

Problema (4.48) poate fi privită sub forma

$$(4.51) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, u(t,.) + A(u(t,.)) \ni 0,\ t > 0, \text{ în } L^2(\Omega) \\ u(0,.) = u_0. \end{cases}$$

Aunci existența, unicitatea, regularitatea și comportarea asimptotică a soluțiilor pentru această problemă decurg cu ușurință din teoria abstractă dezvoltată anterior. Ceea ce ne interesează acum este problema dozării asimptotice pentru ecuația (4.48).

Operatorul A este chiar tare monoton. Astfel, conform Teoremei 2.6, dacă nu există nici o „forțare", atunci $u(t,.)$, converge exponențial în H cînd $t \to \infty$, la 0, unica soluție staționară a problemei.

Să ne imaginăm un proces de dozare cu un $T > 0$ și $d \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$. În plus față de ipotezele specificate mai sus vom presupune că $D(j) = \mathbf{R}$. Deci, conform Teoremei 1.9 din Cap. I, j este chiar continuă pe $\mathbf{R}$. Din (4.50) rezultă atunci că $\overline{D(A)}^H = H$ adică ipoteza (A_2) este verificată.

Pentru simplitate presupunem că nu există forțare de tip continuu, adică ecuația (4.51) rămîne omogenă. Atunci, ținînd seama de Observația 4.3, ale cărei prespuneri sînt evident satisfăcute, putem spune că

Scanned with OKEN Scanner

$u(t + nT, .)$ (definită ca la (4.24)) aproximează, pentru $n \to \infty$, $t \in]0, T[$, unica soluție $\omega^*(t, .)$ a problemei la limită

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(t,.) + A(t,.)\right) \ni 0,\ 0 < t < T,\ \text{în } L^2(\Omega)$$

$$\omega(0,.) = \omega(T, .) + d(.)$$

Evident, $\omega^*(t,.)$ ca funcție de la $[0, T]$ la $L^2(\Omega)$ nu este identic nulă.

Acest exemplu poate fi de interes fizic. Într-adevăr, dacă (4.48) este interpretată ca ecuația căldurii, atunci un proces de dozare ca cel descris mai sus ar putea asigura păstrarea unei temperaturi nenule u, cînd timpul crește indefinit. Astfel, un proces de dozare generat de o sursă de căldură distribuită care injectează căldură în domeniul Ω sub formă de impulsuri la intervale de timp de lungime T, poate realiza un efect care este oarecum asemănător cu cel produs prin injecție „continuă", periodică de căldură.

Notă bibliografică. Rezultatele acestei secțiuni sînt originale. Ele au fost expuse anterior în lucrarea [6] a autorului.

Comentarii bibliografice

Unele rezultate referitoare la comportarea asimptotică a soluțiilor pentru ecuații de evoluție de forma :

$$\text{(E)} \qquad \mathrm{d}u/\mathrm{d}t + A(u) \ni f(t), \quad t > 0$$

cu A maximal monoton pe un spațiu Hilbert, au fost expuse de H. Brézis în monografia [1, Cap. III, p. 88]. Vezi, de asemenea, monografia lui V. Barbu [1, Cap. IV, § 2]. Totuși, prima lucrare fundamentală în această direcție este cea semnată de C. Dafermos și M. Slemrod [1] din 1973 în care se regăsesc și unele eforturi anterioare existente în literatura matematică. În această lucrare este fundamentată tehnica mulțimilor ω-limită pentru ecuații de forma (E) (vezi § 2, Secțiunea 2.3), obținîndu-se în acest context rezultate mai multe și mai profunde decît cele cunoscute deja din cadrul clasic al ecuațiilor diferențiale ordinare pe spații finit dimensionale. Această tehnică a mulțimilor ω-limită acoperă cu succes cazul cînd traiectoriile soluțiilor sînt relativ compacte. Teoria pusă la punct de C. Dafermos și M. Slemrod în lucrarea amintită mai sus a fost apoi completată cu rezultatele abstracte ale lui A. Haraux [2, p. 215], [3], la care se adaugă o serie întreagă de lucrări în care se dau aplicații interesante și profunde ale tehnicii mulțimilor ω-limită. Între acestea amintim : V. Barbu [2], C. Dafermos [1], [2] (în care se găsește o bibliografie cuprinzătoare în acest sens), A. Haraux [2, 3, 4, 5], G. Moroșanu [3, 7], M. Slemrod [1], ș.a.

Un progres considerabil l-a realizat lucrarea din 1975 a lui R. E. Bruck [2] în care se demonstrează convergența în topologia slabă a spațiului a soluțiilor slabe ale ecuației (E), unde $f \equiv 0$ și A este „demipozitiv" (vezi § 1, Secțiunea 1.4), în particular fiind conținut cazul cînd A este o subdiferențială. Între rezultatele remarcabile în acest domeniu mai menționăm următoarele două : teorema ergodică generală a lui J. B. Baillon și H. Brézis [1] (vezi Nota bibliografică la Teorema 1.2) și teorema

Scanned with OKEN Scanner

de comportare la infinit a soluțiilor ecuației (E) în cazul „forțării periodice" stabilită de J. B. Baillon și A. Haraux [1] (în text Teorema 4.1). În literatura matematică există numeroase alte lucrări consacrate comportării soluțiilor ecuațiilor de forma (E). În afară de cele deja amintite mai menționăm următoarele: J. B. Baillon, R. E. Bruck și S. Reich [1], M. Biroli și A. Haraux [1], H. Brézis [2], R. E. Bruck și S. Reich [1], G. Gripenberg [1], A. Haraux [6, 7], I. Miyadera și K. Kobayasi [1], O. Nevanlinna și S. Reich [1], G. Passty [2], A. Pazy [5, 6, 7], S. Reich [3, 5, 6], M. Taniguti, Y. Takahashi și H. Abe [1], L. Veron [1], ș.a.

Se cuvin de asemenea menționate rezultatele de comportare pentru soluțiile mărginite ale ecuației de ordinul doi

$$(\tilde{E}) \qquad d^2u/dt^2 \in A(u) + f(t), \quad t > 0$$

cu A maximal monoton. Cazul $f \in L^1(\mathbf{R}_+; H) \cap L^\infty(\mathbf{R}_+; H)$ este analizat de autor în lucrarea [8]. În cazul $f \equiv 0$, în afară de rezultatele prezentate în acest capitol, amintim E. Mitidieri [2], [3] și L. Veron [2], care adaptează contraexemplul lui J. B. Baillon [2] pentru a arăta că în general soluțiile mărginite ale ecuației $(\tilde{E})$ nu converg în topologia tare a spațiului, pentru $t \to \infty$. Cazul cînd $f(t)$ este periodică sau aproape-periodică este analizat de M. Biroli [1, 2] și R. E. Bruck [4, 5].

După cum s-a văzut, rezultatele de comportare la infinit a soluțiilor pentru ecuațiile (E) și $(\tilde{E})$ conduc la scheme cu diferențe de ordinul întîi sau doi care aproximează soluțiile ecuației $0 \in A(u)$. În afara lucrărilor în legătură cu acest subiect citate deja în text în literatura matematică s-au mai semnalat multe alte lucrări referitoare la scheme cu diferențe finite de ordinul întîi de tip explicit sau implicit în spații Hilbert sau chiar în spații Banach, asociate cu operatori acretivi. Între acestea enumerăm următoarele: R. E. Bruck [6, 7], R. E. Bruck și G. Passty [1], R. E. Bruck și S. Reich [1], I. Miyadera și K. Kobayasi [1], E. Mitidieri [1] O. Nevanlinna [1], O. Nevanlinna și S. Reich [1], A. Pazy [5, 6], G. Passty [2, 3], S. Reich [6, 7], ș.a.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

APLICAȚII

§ 1. O ECUAȚIE CU ÎNTÎRZIERE INFINITĂ

Acest paragraf este consacrat studierii ecuației integro-diferențiale abstracte

$$\frac{du}{dt}(t) + B(u(t)) + \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\,A(u(s))\,ds \ni f(t),\quad t>0 \tag{1.1}$$

la care se asociază datele inițiale

$$u(0) = u_0;\ u(s) = \eta(s) \text{ pentru } s<0. \tag{1.2}$$

Principalele ipoteze care vor fi utilizate în cele ce urmează sînt următoarele :

(I_1) Spațiul în care se consideră ecuația (1.1) se notează cu H și se presupune că este un spațiu Hilbert real cu produsul scalar notat $(.,.)_H$ și norma hilbertiană $\|\cdot\|_H$. V este un alt spațiu Hilbert cu produsul scalar $(.,.)_V$ și norma asociată $\|\cdot\|_V$, dens și continuu scufundat în H (adică injecția $i : V \to H$ este continuă). Dacă H se identifică cu dualul său H' prin intermediul izomorfismului canonic $i_R : H \to H'$ dat de teorema lui F. Riesz (vezi, de exemplu, K. Yosida [1, p. 90] (deci h se identifică cu $i_R(h)$, $\forall h \in H$), atunci avem $V \subset H \subset V'$ în sens algebric și topologic. Precizăm că scufundarea $H \subset V'$ este definită de aplicația $i^* \circ i_R$, unde $i^* : H' \to V'$ este adjuncta aplicației $i : V \to H$. Pentru simplitate vom scrie v și h în loc de $i(v)$ și respectiv $i^*(i_R(h))$ $\forall v \in V$, $\forall h \in H$. Atunci evident se poate scrie că $(v, h)_{VV'} = (v, h)_{H'}$, $\forall v \in V$, $\forall h \in H$.

(I_2) $B : D(B) \subset V \to V'$ este un operator neliniar maximal monoton (posibil multivoc).

(I_3) $A : V \to V'$ este un operator liniar, continuu și simetric care satisface condiția

$$(v, A(v))_{VV'} \geqslant \omega \|v\|_V^2,\ \forall v \in V \text{ ; pentru un } \omega > 0. \tag{1.3}$$

(I_4) $a \in C^1([0, +\infty[) \cap (C^2(]0, +\infty[)$ și, în plus,

$$(-1)^j \frac{d^j a}{dt^j}(t) \geqslant 0, \text{ pentru } j = 0, 1, 2 \text{ și } t>0. \tag{1.4}$$

Atunci, în particular, există $a(\infty) = \lim_{t\to\infty} a(t) \geqslant 0$. Presupunem, mai mult, că $a(\infty) > 0$.

Se notează cu $L^2_\rho(\mathbf{R}_+;V)$ spaţiul L^2 cu ponderea $\rho = -a'$) de funcţii $u: \mathbf{R}_+ = [0, \infty[\to V)$. Mai notăm $X = H \times V \times L^2_\rho(\mathbf{R}_+; V)$, care este un spaţiu Hilbert real cu produsul scalar $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))_X = (x_1, x_2)_H + a(\infty)(y_2, A(y_1))_{VV'} + \int_0^\infty \rho(s)(y_2 - z_2, A(y_1 - z_1))_{VV'}\, ds$. Dacă se notează $v(t) = \int_{-\infty}^t u(s)\, ds$ şi $w(t, s) = v(t - s)$, pentru $t, s \in \mathbf{R}_+$ se observă că ecuaţia (1.1) se scrie formal

$$(1.5)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -B(u(t)) - a(0)A(v(t)) + \displaystyle\int_0^\infty \rho(s)A(w(t,s))\,ds + f(t),\ t>0, \text{ în } H, \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = u(t), \quad t > 0, \quad \text{în } V, \\ \dfrac{dw}{dt}(t,.) = -\dfrac{\partial w}{\partial s}(t,.),\ t > 0, \text{ în } L^2_\rho(\mathbf{R}_+; V). \end{cases}$$

Astfel, este natural să considerăm operatorul $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \to X$, definit prin

$$(1.6)\quad D(\mathcal{A}) = \{(x, y, z) \in X;\ z' \in L^2_\rho(\mathbf{R}_+; V),\ z(0) = y,\ x \in V,$$
$$= [B(x) + a(0)A(y) - \int_0^\infty \rho(s)\, A(z(s))\, ds] \cap H \neq \emptyset\},$$

$$(1.7)\quad \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [B(x) + a(0)A(y) - \displaystyle\int_0^\infty \rho(s)\, A(z(s))\, ds] \cap H \\ -x \\ z' \end{pmatrix}$$

pentru orice $(x, y, z) \in D(\mathcal{A})$.

Se notează cu z' derivata funcţiei z, în sensul distribuţiilor. Un rezultat esenţial în cele ce urmează este

Lema 1.1 *Presupunem că ipotezele* $(I_1) \sim (I_4)$ *sînt îndeplinite. Atunci operatorul* $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ *definit prin* (1.6) *şi* (1.7) *este maximal monoton.*

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că $D(\mathcal{A})$ este o mulţime nevidă şi

$$(1.8)\quad R(I + \mathcal{A}) = X,$$

unde I este operatorul identitate pe X. Aceasta revine la a arăta că pentru fiecare $(p, q, h) \in X$ există $(x, y, z) \in D(\mathcal{A})$ care verifică ecuaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} p \\ q \\ h \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această ecuație se scrie descompus astfel :

$$(1.9)\quad \begin{cases} x + B(x) + (a(0) - \int_0^\infty \rho(s)\, e^{-s}\, ds)A(x) \ni p_1 = \\ = p - a(0)A(q) + (\int_0^\infty \rho(s)\, e^{-s} ds)A(q) + \int_0^\infty \rho(s)\left(\int_0^s e^{\tau - s} A(h(\tau))\, d\tau\right) ds, \\ y = x + q, \\ z = e^{-s} y + \int_0^s e^{\tau - s} h(\tau)\, d\tau. \end{cases}$$

Să observăm că $\delta = a(0) - \int_0^\infty \rho(s)\, e^{-s}\, ds = \int_0^\infty e^{-s} a(s)\, ds > 0$. Deoarece operatorul identitate $I : V \to V'$ (mai exact operatorul de scufundare a spațiului V în V') și $A : V \to V'$ sînt ambii peste tot definiți pe V, monotoni și continui rezultă că $I + B + \delta A : D(B) \subset V \to V'$ este un operator maximal monoton (conform Teoremei 1.4′, Teoremei 1.6 și Observației 1.4 din Cap. I). Mai mult, $I + B + \delta A$ este tare monoton, deci coerciv, deoarece A a fost presupus tare pozitiv. Așadar (vezi Teorema 1.5′, Cap. I), $R(I + B + \delta A) = V'$, deci prima ecuație din (1.9) admite o soluție unică $x \in D(B)$. Desigur faptul că am notat cu aceeași literă I atît operatorul de scufundare a lui V în V' cît și identitatea pe X nu poate duce la nici o confuzie. De asemenea, mai observăm că $y = x + q \in V$ și $z, z' \in L^2_\rho(\mathbf{R}_+ ; V)$, datorită proprietăților produsului de convoluție (vezi, de exemplu, W. Kecs [1, Cap. 2, p. 53]). În plus, $z(0) = y$ și $p - x \in (B(x) + a(0)A(y) - \int_0^\infty \rho(s)\, A(z(s))\, ds) \cap H$. În concluzie, $(p, q, h) \in R(I + \mathscr{A})$. Un calcul elementar, pe care îl lăsăm în seama cititorului, arată că $\mathscr{A}$ este monoton. Deci $\mathscr{A}$ este maximal monoton. ■

Teorema 1.1. (*Existență și unicitate*). *Presupunem că ipotezele* $(I_1) \sim (I_4)$ *sînt îndeplinite. Mai presupunem că* $\eta \in L^1(\mathbf{R}_- ; V)$, $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$, *și notăm* $\zeta(s) = \int_{-\infty}^{-s} \eta(\tau)\, d\tau$, $s \geqslant 0$. *Dacă, în plus,*

$$(1.10)\quad (u_0, \zeta(0), \zeta) \in D_*(\mathscr{A}) \text{ definit prin (1.6) și}$$

$$f \in W^{1,1}(0, T ; H),\ T > 0,$$

atunci problema (1.1), (1.2) *admite o soluție unică* $u \in W^{1,\infty}(0, T ; H)$, *în sensul că* u *satisface ecuația* (1.1) a.p.t. $t \in]0, T[$ *și condițiile inițiale* (1.2). *Mai mult, derivata punctuală la dreapta* $(d^+u/dt)(t)$ *există pentru toți* $t \in [0, T[$ *și ecuația* (1.1) *este satisfăcută cu* d^+/dt *în loc de* d/dt *pentru orice* $t \in [0, T[$. *In plus*

$$(1.11)\quad \int_0^t u(s)\, ds \in W^{1,\infty}(0, T ; V).$$

Demonstrație. Deoarece operatorul $\mathscr{A}$ este maximal monoton (vezi Lema 1.1) și datorită condiției (1.10) problema Cauchy

$$(1.12)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t,.) \end{pmatrix} + \mathscr{A}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t,.) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < t < T, \text{ în } X, \\ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t,.) \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \zeta(0) \\ \zeta \end{pmatrix} \end{cases}$$

admite o soluție tare unică $(u(t),\ v(t),\ w(t,.)) \in W^{1,\infty}(0,\ T;\ X)$, conform Teoremei 2. din Cap. I. Mai mult, conform aceluiași rezulat, există $(\mathrm{d}^+/\mathrm{d}t)$ $(u(t),\ v(t),\ w(t,.))$ pentru toți $t \in [0,\ T[$ și ecuația $(1.12)_1$ cu $\mathrm{d}^+/\mathrm{d}t$ în loc de $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ este verificată pentru toți $t \in [0,\ T[$. Avînd în vedere definiția lui $\mathscr{A}$ rezultă că ecuația $(1.12)_1$ se scrie sub forma sistemului (1.5). Astfel, se observă că

$$(1.13)\quad \forall t \in [0,\ T[,\ v(t) = \zeta(0) + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^t u(s)\,\mathrm{d}s \in W^{1,\infty}(0,T;\ V).$$

În particular, condiția (1.11) este verificată. În plus, se găsește ușor că

$$(1.14)\qquad w(t,\ s) = v(t-s),\quad \forall t \in [0,\ T[,\quad \forall s \in \mathbf{R}_+.$$

În concluzie, (1.5), (1.13) și (1.14) arată că toate afirmațiile din enunțul teoremei sînt adevărate. ■

Observația 1.1. Din demonstrația Teoremei 1.1 se vede că dacă $(u(t),\ v(t),\ w(t,.))$ este o soluție tare pentru problema Cauchy (1.12) corespunzătoare tripletului $(u_0,\ \zeta(0),\ \zeta) \in D(\mathscr{A})$ și funcției $f \in W^{1,1}(0,\ T;\ H)$, atunci prima componentă $u(t)$ este o soluție a problemei (1.1), (1.2) pe $[0,\ T]$ în sensul Teoremei 1.1. Reciproc, dacă $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, satisface problema (1.1), (1.2) în sensul Teoremei 1.1, cu u_0, ζ satisfăcînd condiția (1.10) și $f \in W^{1,1}(0,\ T;\ H)$, atunci tripletul $(u(t),\ v(t),\ w(t,.))$, $0 \leqslant t \leqslant T$ verifică problema Cauchy (1.12), unde $v(t)$ și $w(t,.)$ sînt definite prin relațiile (1.13) și respectiv (1.14). În acest caz vom spune că $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, este o *soluție tare* a problemei (1.1), (1.2).

Să considerăm aplicația $K : D(\mathscr{A}) \times W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+;\ H) \to C(\mathbf{R}_+;\ X)$ definită prin : $K(u_0,\ \zeta_0,\ \zeta,\ f)(t) = (u(t),\ v(t),\ w(t,.))$, $t \geqslant 0$, unde $(u(t),\ v(t),\ w(t,.))$. $t \geqslant 0$, este soluția tare a ecuației $(1.12)_1$ considerată pe $\mathbf{R}_+$ cu data inițială $(u_0,\ \zeta_0,\ \zeta) = (u_0,\ \zeta(0),\ \zeta) \in D(\mathscr{A})$ și funcția $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+;\ H)$. Atunci avem

$$(1.15)\qquad \|K(u_0,\ \zeta_0,\ \zeta,\ f)(t) - K(\bar{u}_0,\ \bar{\zeta}_0,\ \bar{\zeta},\ \bar{f})(t)\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \|(u_0,\ \zeta_0,\ \zeta) - (\bar{u}_0,\ \bar{\zeta}_0,\ \bar{\zeta})\|_X + \int_0^t \|f(s) - \bar{f}(s)\|_H\,\mathrm{d}s,\quad \forall t \geqslant 0,$$

$$\forall (u_0,\ \zeta_0,\ \zeta),\ (\bar{u}_0,\ \bar{\zeta}_0,\ \bar{\zeta}) \in D(\mathscr{A}),\ \forall f, \bar{f} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+;\ H).$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident K se poate extinde ca o aplicație neexpansivă definită pe $\overline{D(\mathscr{A})}^X \times L^1_{loc}(\mathbf{R}_+; H)$ cu valori în $C(\mathbf{R}_+; X)$. În particular, definind $S(t)(u_0, \zeta_0, \zeta) = K(u_0, \zeta_0, \zeta, 0)(t)$, pentru $t \geq 0$ și $(u_0, \zeta_0, \zeta) \in \overline{D(\mathscr{A})}^X$ se poate afirma că familia $\{S(t) : \overline{D(\mathscr{A})}^X \to \overline{D(\mathscr{A})}^X ; t \geq 0\}$ este un semigrup de contracții neliniare (generat de $-\mathscr{A}$).

Evident, pentru orice $(u_0, \zeta_0, \zeta, f) \in \overline{D(\mathscr{A})}^X \times L^1_{loc}(\mathbf{R}_+; H)$, funcția $(u(t), v(t), w(t,.)) = K(u_0, \zeta_0, \zeta, f)(t)$, $t \geq 0$, este o soluție slabă a ecuației $(1.12)_1$. Vom spune atunci că $u(t)$, $t \geq 0$, este o *soluție slabă* a ecuației (1.1). Prin urmare $u(t)$, $t \geq 0$, este limită uniformă (pe orice compact din $\mathbf{R}_+$) de soluții tari, în topologia lui H, astfel încît $u(t) \in C(\mathbf{R}_+; H)$ și $\int_0^t u(s)\, ds \in C(\mathbf{R}_+; V)$.

Pentru a preciza mai bine noțiunea de soluție slabă pentru ecuația (1.1) să considerăm mulțimea

$$M = \{(u_0, \eta) \in V \times L^1(\mathbf{R}_-; V);\ (u_0, \zeta(0), \zeta) \in D(\mathscr{A})\}, \tag{1.16}$$

unde $\zeta(s) = \int_{-\infty}^{-s} \eta(\tau)\, d\tau$, $s \geq 0$. Estimarea (1.15) ne conduce la

$$\begin{aligned} \|K(u_0, \eta, f)(t) - K(\bar{u}_0, \bar{\eta}, \bar{f})(t)\|_X &\leq \|(u_0, \zeta_0, \zeta) - (\bar{u}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\zeta})\|_X + \int_0^t \|f(s) - \bar{f}(s)\|_H\, ds \leq \|u_0 - \bar{u}_0\|_H + \\ &+ \|\eta - \bar{\eta}\|_{L^1(\mathbf{R}_-; V)} + \|\zeta - \bar{\zeta}\|_{L^2_\rho(\mathbf{R}_+; V)} + \\ &+ \int_0^t \|f(s) - \bar{f}(s)_H\|\, ds \leq \|u_0 - \bar{u}_0\|_H + (1 + \sqrt{a(0) - a(\infty)}) \times \\ &\times \|\eta - \bar{\eta}\|_{L^1(\mathbf{R}_-; V)} + \int_0^t \|f(s) - \bar{f}(s)\|_H\, ds, \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\forall (u_0, \eta), (\bar{u}_0, \bar{\eta}) \in M,\ \forall f, \bar{f} \in W^{1,1}_{100}(\mathbf{R}_+; H) \text{ și } \forall t \geq 0.$$

Se notează cu $\bar{M}$ închiderea mulțimii M în spațiul $H \times L^1(\mathbf{R}_-; V)$. Întrucît (1.17) se extinde prin densitate rezultă că pentru orice $(u_0, \eta, f) \in \bar{M} \times L^1_{loc}(\mathbf{R}_+; H)$ ecuația (1.1) admite o soluție slabă $u(t)$, $t \geq 0$ astfel încît u verifică (1.2).

Propoziția 1.1. (Regularitatea soluțiilor). *Presupunem îndeplinite condițiile Teoremei 1.1. În plus, mai presupunem că*

$$(A_\lambda(x), z)_{VV'} \geq 0,\quad \forall x \in D(B),\ z \in B(x),\ \lambda > 0, \tag{1.18}$$

unde $A_\lambda = (1/\lambda)(I - (I + \lambda A)^{-1})$ *și*

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{0} a(t - s)\, A(\eta(s))\, ds \in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}_+; H), \tag{1.19}$$

$$f(t) \in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}_+; H). \tag{1.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu $u(t)$, $t \geqslant 0$, *soluția problemei* (1.1), (1.2). *Atunci*, $\forall t > 0$,

$$(a * A(u))(t) = \int_0^t a(t-s)\, A(u(s))\, ds \in H, \left(A\left(\int_0^t u(s)\, ds\right) \in H \text{ și}\right.$$

(1.21) $\forall T > 0$, $\exists\, C_T$ *astfel încît*

$$\forall t \in [0,\ T[,\ \left\|\int_{-\infty}^t a(t-s)\, A(u(s))\, ds\right\|_H + \left\|A\left(\int_0^t u(s)\, ds\right)\right\|_H \leqslant C_T.$$

Dacă mai presupunem că derivatele (*în sensul distribuțiilor*)

(1.22) $$f',\ \gamma' \in L^1(\mathbf{R}_+; H),$$

atunci estimarea (1.21) *are loc cu* $C_T = Const.$ (*independentă de* T) *și*

(1.23) $$\forall t \in \mathbf{R}_+;\ |u(t)|_V \leqslant \text{Const.}$$

Demonstrație. Se notează cu A_H operatorul definit prin

$$D(A_H) = \{x \in V;\ A(x) \in H\},\ A_H(x) = A(x),\ \forall x \in D(A_H).$$

Datorită ipotezei (I_3) operatorul A_H este maximal monoton pe H. Precizăm că maximalitatea lui A_H este o consecință imediată a relației $R(I + \lambda A) = V'$, $\forall \lambda > 0$, care se arată ca în demonstrația Lemei 1.1. Se notează cu A_λ, $\lambda > 0$, aproximanta Yosida a lui A_H, care se scrie ca în enunțul propoziției. Pentru orice $\lambda > 0$, A_λ este un operator continuu, autoadjunct și monoton de la H la H. De fapt, A_λ se poate considera și ca operator de la V la V'. Ecuația (1.1) se mai scrie sub forma

(1.24) $$\frac{du}{dt}(t) + B(u(t)) + (a * A(u))(t) \ni f(t) - \gamma(t),\ t > 0.$$

Înmulțind această ecuație cu $A_\lambda(u(t))$ și integrînd apoi de la 0 la t se obține, datorită condiției (1.18),

(1.25) $$(A_\lambda(u(t)),\ u(t))_H + 2\int_0^t (A_\lambda(u(s)),\ (a * A(u))(s))_{VV'} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^t (A_\lambda(u(s)),\ f(s) - \gamma(s))_H\, ds + (A_\lambda(u_0),\ u_0)_H,\ t \geqslant 0.$$

Pe de altă parte, se poate arăta că

(1.26) $\forall x \in V$, $A_\lambda(x) \to A(x)$, slab stelat în V', pentru $\lambda \to 0$

Pentru $x \in D(A_H)$ convergența are loc chiar în topologia tare a lui H datorită proprietăților cunoscute ale aproximantei Yosida. Pentru a arăta (1.26) este suficient să demonstrăm că

(1.27) $\forall x \in V$, $J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1}(x) \to x$, pentru $\lambda \to 0$, slab în V,

întrucît $A_\lambda(x) = A(J_\lambda x)$, $\lambda > 0$. Înmulțind egalitatea $J_\lambda x + \lambda A_\lambda(x) = x$, $\lambda > 0$, cu $A_\lambda(x)$ și ținînd cont de ipoteza (I_3) obținem

(1.28) $$\omega \|J_\lambda x\|_V^2 \leqslant (x,\ A(J_\lambda x))_H \leqslant \|x\|_V \cdot \|A\|_{L(V,V')} \cdot \|J_\lambda x\|_V \quad \forall x \in V,\ \forall \lambda > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare

(1.29) $\{J_\lambda x\,;\ \lambda > 0\}$ este o mulţime mărginită în V.

Deoarece A_H este generatorul infinitezimal al unui semigrup de contracţii liniare de clasă C_0 rezultă că $D(A_H)$ este o mulţime densă în H (vezi, de exemplu, V. Barbu [1, p. 25]). Deci, conform Teoremei 1.3 (vi) din Cap. I,

(1.30) $\forall x \in H,\ J_\lambda x \to x,$ pentru $\lambda \to 0,$ tare în H.

Combinînd (1.29) cu (1.30) se obţine (1.27) şi implicit (1.26). Să amintim acum următoarea „egalitate a energiei" (vezi, de exemplu, V. Barbu [4] sau S.-O. Londen [1])

$$(1.31)\qquad 2\int_0^t (q(\tau),\ (a*q)(\tau))_H\,\mathrm{d}\tau = a(t)\left\|\int_0^t q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_H^2 -$$

$$-\int_0^t a'(s)\left\|\int_0^s q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_H^2 \mathrm{d}s - \int_0^t a'(t-\tau)\left\|\int_\tau^t q(s)\,\mathrm{d}s\right\|_H^2 \mathrm{d}\tau +$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^\tau a''(\tau - s)\left\|\int_s^\tau q(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right\|_H^2 \mathrm{d}s,\ \forall t > 0,$$

unde $q \in L^2_{100}(\mathbf{R}_+\,;\ H)$.

Într-adevăr, efectuînd nişte integrări prin părţi şi schimbări ale ordinii de integrare, membrul drept al egalităţii (1.31) devine succesiv

$$-2\int_0^t\int_s^\tau a'(\tau - s)\,(q(s),\ \int_s^\tau q(\sigma)_H\mathrm{d}\sigma)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + 2\int_0^t a(t-s)\,(q(s),\ \int_0^t q(\sigma)\mathrm{d}\sigma)_H\mathrm{d}s =$$

$$= -2\int_0^t\int_s^t a'(\tau - s)\,(q(s),\ \int_s^\tau q(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma)_H\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s + 2\int_0^t a(t-s)\,(q(s),$$

$$\int_s^t q(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma)_H\,\mathrm{d}s = 2\int_0^t\int_s^t (a(\tau - s)\,q(s),\ q(\tau))_H\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s =$$

$$= 2\int_0^t\int_0^\tau (q(\tau),\ a(\tau - s)\,q(s))_H\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau = 2\int_0^t (q(\tau),\ (a*q)(\tau))_H\,\mathrm{d}\tau,$$

adică tocmai ceea ce doream. În virtutea ipotezei (I_4) egalitatea (1.31) implică

$$2\int_0^t (q(\tau),\ (a*q)(\tau))\,\mathrm{d}\tau \geqslant a(t)\left\|\int_0^t q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_H^2,\ t \geqslant 0.$$

Pe o cale identică se poate stabili că

$$(1.32)\qquad 2\int_0^t (J_\lambda A(u),\ a*A(u))_{V'V}\,\mathrm{d}s \geqslant a(t)\left(J_\lambda\int_0^t A(u)\,\mathrm{d}s,\ \int_0^t A(u)\mathrm{d}s\right)_{V'V},$$

$$\forall t \geqslant 0,\ \lambda > 0.$$

Conform Teoremei 1.1, $u \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}_+ ; V)$, deci $A(u) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}_+ ; V')$ și, în virtutea estimării (1.28), $J_\lambda A(u) = (1/\lambda)\ (u - J_\lambda u) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}_+ ; V)$, $\forall \lambda > 0$. Astfel, toate calculele care intervin în stabilirea inegalității (1.32) sînt permise. Folosind acum relațiile (1.25), (1.26) și (1.32) obținem

$$(1.33) \qquad (A_\lambda(u(t)),\ u(t))_H + a(\infty)\ \|F_\lambda(t)\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t (F'_\lambda(s),\ f(s) - \gamma(s))_H\ ds + C,\ \forall t \geqslant 0,\ \forall \lambda > 0,$$

unde $F_\lambda(t) = \int_0^t A_\lambda(u(s))\ ds$ și C=Const. (independentă de λ). În stabilirea estimării (1.33) am folosit și faptul că $(A_\lambda(x),\ A(x) - A_\lambda(x))_{VV'} \geqslant 0$, $\forall x \in V$, $\forall \lambda > 0$. Integrînd prin părți în (1.33) se obține, după niște calcule:

$$(1.34) \qquad (A_\lambda(u(t)),\ u(t))_H + C_1 \|F_\lambda(t)\|_H^2 \leqslant C_2(1 + \|f(t) - \gamma(t)\|_H^2 +$$

$$+ \int_0^t \|F_\lambda(s)\|_H \cdot \|f'(s) - \gamma'(s)\|_H\ ds),\quad \forall \lambda > 0,\ \forall t \geqslant 0.$$

Renunțînd pentru moment la primul termen din membrul întîi al inegalității (1.34) și considerînd îndeplinite condițiile (1.19) și (1.20) rezultă prin aplicarea Lemei 2.1 din Cap. I

(1.35) $\forall T > 0$, $\exists M_T$ (independentă de λ) astfel încît $\forall t \in [0,\ T]$, $\forall \lambda > 0$, $\|F_\lambda(t)\|_H \leqslant M_T$.

Deci, tinzînd cu λ la 0 în (1.35), se obține

$$(1.36) \qquad F(t) = \int_0^t A(u(s))\ ds = A\left(\int_0^t u(s)\ ds\right) \in H \text{ și}$$

$$\forall t \in [0,\ T],\ \|F(t)\|_H \leqslant M_T.$$

Atunci (1.21) rezultă din (1.19), (1.36) și egalitatea evidentă

$$(1.37) \qquad (a * A(u))(t) = a(0)F(t) + (da/dt * F)(t).$$

Dacă, în plus, se presupune (1.22) îndeplinită, atunci constanta M_T din (1.35) este independentă de T, deci

$$(1.38) \qquad \forall t \in \mathbf{R}_+,\ F(t)\|_H \leqslant \text{Const.}$$

și, prin urmare, din (1.22) și (1.37) rezultă că

$$(1.39) \qquad \forall t \in \mathbf{R}_+,\ \left\| \int_{-\infty}^t a(t-s)\ A(u(s))\ ds \right\|_H \leqslant \text{Const.}$$

Trecînd la limită în estimarea (vezi (1.34)) $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $(A_\lambda(u(t)),\ u(t))_H \leqslant$ $\leqslant$ Const. și folosind ipoteza (I_3) se obține estimarea $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\|u(t)\|_V \leqslant$ $\leqslant$ Const. care împreună cu (1.39) implică (1.23). Astfel, propoziția este complet demonstrată. ■

Observația 1.2. Cum am văzut mai sus, problema (1.1), (1.2) poate fi privită ca o problemă Cauchy pentru ecuația integro-diferențială (1.24).

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, orice ecuație integro-diferențială de tip (1.24) poate fi scrisă ca o ecuație de tip (1.1) dacă se consideră că $u(s) = 0$, $\forall s < 0$.

Teorema 1.2. (Comportarea asimptotică). *Presupunem că ipotezele* $(I_1) \sim (I_4)$ *și* (1.18) *sînt îndeplinite și, în plus, că* $0 \in B(0)$, $a \not\equiv$ Const, *injecția lui* V *în* H *este compactă. Se consideră mulțimea* $M_1 = \left\{(u_0, \eta) \in M ; A\left(\int_{-\infty}^{0} \eta(s)\, ds\right) \in H \text{ și } \gamma' \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)\right\}$, *unde* M *este mulțimea definită la* (1.16) *iar* $\gamma(t) = \int_{-\infty}^{0} a(t-s) \cdot A(\eta(s))\, ds$. *Presupunem că* (u_0, η) *este în închiderea mulțimii* M_1 *în spațiul* $H \times L^1(\mathbf{R}_- ; V)$ *și* $f \in L^1(\mathbf{R}_+ ; H)$. *Fie* $u(t)$, $t \geqslant 0$ *soluția slabă corespunzătoare pentru problema* (1.1), (1.2). *Atunci*

$$u(t) \to 0, \text{ tare în } H, \text{ pentru } t \to \infty. \tag{1.40}$$

Demonstrație. Să presupunem întîi că $(u_0, \eta) \in M_1$ și $f \equiv 0$ pe $\mathbf{R}_+$. Atunci $u(t)$, $t \geqslant 0$, este o soluție tare pentru ecuația (1.1) cu $f \equiv 0$ (vezi Teorema 1.1 și Observația 1.1). Mai exact, tripletul $(u(t), v(t), w(t,.)) = S(t)\,(u_0, \zeta_0, \zeta)$, $t \geqslant 0$, este soluție tare pentru (1.12) cu $f \equiv 0$, unde v și w sînt funcțiile definite prin (1.13) și respectiv (1.14) și $\zeta(s) = \int_{-\infty}^{-s} \eta(\tau)\, d\tau$, $\zeta_0 = \zeta(0)$. Să observăm că $0 \in \mathscr{A}(0)$, unde $\mathscr{A}$ este operatorul definit prin (1.6), (1.7) iar 0 este aici elementul nul al spațiului $X = H \times V \times L^2_\rho(\mathbf{R}_+ ; V)$. Deci

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|S(t)\,(u_0, \zeta_0, \zeta)\|_X \leqslant C = \|(u_0, \zeta_0, \zeta)\|_X . \tag{1.41}$$

Vom arăta mai mult că orbita $\gamma(u_0, \zeta_0, \zeta) = \{S(t)\,(u_0, \zeta_0, \zeta) ; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă în X. Deoarece $(u_0, \eta) \in M_1$, conform Propoziției 1.1 avem

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|u(t)\|_V + \|A(v(t))\|_H \leqslant \text{Const.} \tag{1.42}$$

Deoarece injecția lui V în H este compactă rezultă direct din (1.42) că mulțimea

$$\{u(t) ; t \geqslant 0\} \text{ este relativ compactă în } H. \tag{1.43}$$

Tot din (1.42) rezultă că mulțimea

$$\{v(t) ; t \geqslant 0\} \text{ este relativ compactă în } V. \tag{1.44}$$

Pentru a arăta (1.44) să remarcăm mai întîi că injecția $i^* : H' \to V'$ este un operator compact deoarece $i : V \to H$ este astfel (conform teoremei lui Schauder ; vezi, de exemplu, K. Yosida [1, p. 282]). Astfel, operatorul $A_H^{-1} : H \to V$ este compact. Prin urmare ținînd cont de (1.42) se obține (1.44) întrucît $v(t) = A_H^{-1}(A(v(t)))$. Vom arăta în cele ce urmează că mulțimea

$$\{w(t,.) ; t \geqslant 0\} \text{ este relativ compactă în } L^2_\rho(\mathbf{R}_+ ; V). \tag{1.45}$$

Pentru aceasta să fixăm șirul $t_n \to \infty$. Conform cu (1.14) avem

$$w(t_n, s) = \mu_n(s)\, v(t_n - s) + (1 - \mu_n(s))\, \zeta(s - t_n), \ s \geqslant 0, \tag{1.46}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\mu_n(s) = 1$ pentru $s \in [0, t_n]$ și $\mu_n(s) = 0$ pentru $s > t_n$. Evident șirul de funcții $\xi_n(s) = (1 - \mu_n(s))\, \zeta(s - t_n)$, $s \in \mathbf{R}_+$, $n = 1, 2, \ldots$ converge la funcția identic nulă, în topologia spațiului $L^2_\rho(\mathbf{R}_+ ; V)$.

Să considerăm acum șirul de funcții $h_n(s) = \mu_n(s)\, v(t_n - s)$, $s \in \mathbf{R}_+$ $n = 1, 2, \ldots$ Dacă fixăm un interval $[0, s_0]$, $s_0 > 0$, atunci pentru n suficient de mare astfel încît $t_n > s_0$ avem $\forall s \in [0, s_0]$, $h_n(s) = v(t_n - s)$ deci $h_{n/[0, s_0]} \in C([0, s_0] ; V)$. Conform cu (1.42) avem $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\|\mathrm{d}v(t)/\mathrm{d}t\|_V = \|u(t)\|_V \leqslant$ Const. Deci, familia de funcții $\{h_{n/[0, s_0]} ;\ n \in \mathbf{N}, n$ suficient de mare$\}$ este echicontinuă în raport cu topologia lui V. Astfel, ținînd cont și de (1.44), rezultă că există $h \in C([0, s_0] ; V)$ astfel încît, pe un subșir, $h_{n/[0, s_0]} \to h$, în $C([0, s_0] ; V)$. Rezultă atunci că există o funcție notată tot cu h în $C(\mathbf{R}_+ ; V) \cap L^\infty(\mathbf{R}_+ ; V)$ astfel încît, pe un subșir,

$$\|h_n(s) - h(s)\|_V \to 0,\ \forall s \in \mathbf{R}_+. \tag{1.47}$$

Ținînd cont de (1.44) și (1.47) rezultă prin aplicarea teoremei de convergență dominată a lui Lebesgue că pe un subșir, $h_n \to h$, în $L^2_\rho(\mathbf{R}_+ ; V)$. Prin urmare, are loc (1.45). Din (1.43), (1.44) și (1.45) rezultă că orbita $\gamma(u_0, \zeta_0, \zeta)$ este relativ compactă în X. Așadar mulțimea ω-limită notată $\omega(u_0, \zeta_0, \zeta)$ este nevidă. Să fixăm $(x_0, y_0, z_0) \in \omega(u_0, \zeta_0, \zeta)$. Conform Teoremei 2.7 din Cap. II, putem vorbi de grupul continuu de izometrii $\{S(t) : \omega(u_0, \zeta_0, \zeta) \to \omega(u_0, \zeta_0, \zeta) ;\ t \in \mathbf{R}\}$ care reprezintă extensia la grup a semigrupului corespunzător și avem:

$$\|S(t)\,(x_0, y_0, z_0)\|_X = \|(x_0, y_0, z_0)\|_X,\ \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.48}$$

Deoarece $(u_0, \zeta_0, \zeta) \in D(\mathscr{A})$ rezultă conform Teoremei 2.8, (iv) din Cap. II că $(x_0, y_0, z_0) \in D(\mathscr{A})$ și prin urmare

$$(\mathrm{d}^+/\mathrm{d}t)\, S(t)\,(x_0, y_0, z_0) + \mathscr{A}^0(S(t)\,(x_0, y_0, z_0)) = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.49}$$

Înmulțind scalar această ecuație cu $S(t)\,(x_0, y_0, z_0)$ se obține, ținîndu-se cont de (1.48),

$$(\mathscr{A}^0(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \tilde{w}(t,.)), (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \tilde{w}(t,.)))_X = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}, \tag{1.50}$$

unde $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \tilde{w}(t,.)) = S(t)\,(x_0, y_0, z_0)$ iar $\mathscr{A}^0$ este secțiunea minimală a lui $\mathscr{A}$. Avînd în vedere definiția operatorului $\mathscr{A}$ egalitatea (1.50) se scrie explicit astfel:

$$\begin{aligned}(\tilde{u}(t), B(\tilde{u}(t)))_{VV'} + [a(0) - a(\infty)]\,(\tilde{u}(t), A(\tilde{v}(t)))_{VV'} + \\ + (\tilde{u}(t), \int_0^\infty (\mathrm{d}a/\mathrm{d}s)(s)\, A(\tilde{w}(t, s))\, \mathrm{d}s)_{VV'} + \int_0^\infty (\mathrm{d}a/\mathrm{d}s)(s)\,(\tilde{v}(t) - \tilde{w}(t, s),\\ A(\tilde{u}(t) + (\partial w/\partial s)(t, s)))_{VV'}\, \mathrm{d}s = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}.\end{aligned} \tag{1.51}$$

Pentru simplitatea exprimării am considerat în relația (1.51) și vom considera și în cele ce urmează că operatorul B este univoc. Din (1.51) se obține imediat

$$\begin{aligned}(\tilde{u}(t), B(\tilde{u}(t)))_{VV'} + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}(s)(\tilde{v}(t) - \tilde{w}(t, s),\\ A\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial s}(t, s)\right)\Big)_{VV'}\, \mathrm{d}s = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}.\end{aligned} \tag{1.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $0 \in B(0)$ și B este operator monoton rezultă că

$$(\tilde{u}(t),\ B(\tilde{u}(t)))_{VV'} \geqslant 0,\quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.53}$$

Integrînd prin părți în (1.52) și ținînd seama de (1.53) și de proprietățile nucleului $a(t)$ se deduce din (1.52) că

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}s^2}(s)\,(\tilde{v}(t) - \tilde{w}(t,\ s),\ A(\tilde{v}(t) - \tilde{w}(t,\ s)))_{VV'}\,\mathrm{d}s = 0,\quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.54}$$

Deoarece a nu este identic constantă pe $\mathbf{R}_+$ rezultă, în virtutea ipotezei (I_4), că funcția $\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}s^2$ nu este identic zero pe $\mathbf{R}_+$. Prin urmare, există un interval $[s_1,\ s_2] \subset \mathbf{R}_+$, cu $0 \leqslant s_1 < s_2$, astfel încît $(\mathrm{d}^2a/\mathrm{d}s^2)\,(s) \neq 0$, $\forall s \in [s_1,\ s_2]$. Astfel, egalitatea (1.54) implică

$$\tilde{w}(t,\ s) = \tilde{v}(t),\quad \forall t \in \mathbf{R},\ \forall s \in [s_1,\ s_2]. \tag{1.55}$$

Întrucît $S(t)\,(x_0,\ y_0,\ z_0) = (\tilde{u}(t),\ \tilde{v}(t),\ \tilde{w}(t,.\,)))$, $t \in \mathbf{R}$, verifică ecuația (1.49), avem

$$\mathrm{d}\tilde{v}(t)/\mathrm{d}t = \tilde{u}(t),\ \forall t \in \mathbf{R}_+, \tag{1.56}$$

$$\tilde{w}(t,\ s) = \tilde{v}(t - s),\quad \forall t \in \mathbf{R},\ \forall s \in \mathbf{R}_+. \tag{1.57}$$

Din (1.55), (1.56) și (1.57) rezultă atunci $\tilde{v}(t) \equiv C$ pe $\mathbf{R}$; $\tilde{w}(t,\ s) \equiv C$ pe $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ și $\tilde{u}(t) \equiv 0$ pe $\mathbf{R}$, unde $C = \mathrm{Const}$. Cu alte cuvinte, vectorul $(x_0,\ y_0,\ z_0) = (0,\ C,\ C)$ este un punct fix al semigrupului $\{S(t)\,;\,t \geqslant 0\}$ adică, echivalent, un element al mulțimii $\mathscr{A}^{-1}(0)$. Astfel, $S(t)\,(u_0,\ \zeta_0,\ \zeta)$ converge tare în X, pentru $t \to \infty$, la un element din $\mathscr{A}^{-1}(0)$. În virtutea Teoremei 1.3 și Propoziției 2.4 din Cap. II, rezultă că pentru $(u_0,\ \eta)$ din închiderea mulțimii M_1 în spațiul $H \times L^1(\mathbf{R}_-\,;\,V)$ și pentru $f \in L^1(\mathbf{R}_+\,;\,H)$ soluția slabă $(u(t),\ v(t),\ w(t,\ .\,))$, $t \geqslant 0$, a problemei (1.12) considerate pe $\mathbf{R}_+$ converge tare în X, pentru $t \to \infty$, la un element din $\mathscr{A}^{-1}(0)$. În particular are loc (1.40). Astfel Teorema 1.2 este complet demonstrată. ∎

Teorema 1.3. (Comportarea asimptotică a mediei). *Presupunem că ipotezele* $(I_1) \sim (I_4)$ *sînt îndeplinite,* $0 \in D(B)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+\,;\,H)$ *și* $\lim_{t\to\infty}(1/t)\int_0^t \|f(s)\|_H\,\mathrm{d}s = 0$. *Fie* $u(t)$, $t \geqslant 0$, *o soluție slabă a ecuației* 1.1 *(în sensul indicat de Observația* 1.1). *Atunci*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau = 0,\ \textit{tare în } V. \tag{1.58}$$

Demonstrație. Să arătăm că $0 \in R(\mathscr{A})$, unde $\mathscr{A}$ este operatorul definit prin (1.6) și (1.7). Pentru aceasta să considerăm ecuația algebrică $0 \in \mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ținînd seama de forma operatorului $\mathscr{A}$, rezultă că această ecuație admite o soluție de forma $(x = 0,\ y = y_0,\ z \equiv y_0) \in X$, unde y_0 verifică ecuația

$$A(y_0) \in -(1/a(\infty))\ B(0). \tag{1.59}$$

Existența a cel puțin unei soluții pentru (1.59) este o consecință a faptului ca $R(A) = V'$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, amintim că $u(t)$, $t \geqslant 0$, este soluție slabă pentru ecuația (1.1) dacă și numai dacă $(u(t), v(t), w(t,.)) \in C(\mathbf{R}_+ ; X)$ este soluție slabă pentru ecuația $(1.12)_1$ considerată pe $\mathbf{R}_+$. Dacă $(u(t), v(t), w(t,.))$ $t \geqslant 0$, ar fi soluție tare pentru $(1.12)_1$, atunci am avea relația

$$v(t) = \zeta_0 + \int_0^t u(s)\mathrm{d}s, \qquad \zeta_0 = \int_{-\infty}^0 u(s)\ \mathrm{d}s \in V. \tag{1.60}$$

Din definiția soluției slabe rezultă însă în mod evident că (1.60) rămîne valabilă și pentru cazul soluției slabe. În concluzie, ținînd cont că $0 \in R(\mathscr{A})$ și aplicînd Teorema 1.9 și Observația 1.11 din cap. II, rezultă (1.58). ■

Observația 1.3. După cum s-a văzut, în demonstrația Teoremei 1.3 nu folosit s-a ipoteza că injecția lui V în H este compactă.

Notă bibliografică. Investigațiile din această secțiune se bazează în esență pe lucrarea recentă a lui V. Barbu [2]. Metoda folosită, aceea de a reprezenta ecuația (1.1) ca o ecuație diferențială neliniară pe spațiul Hilbert X definit mai sus, a fost folosită anterior de C. M. Dafermos [1] în studiul ecuațiilor vîscoelasticității liniare. Ecuația abstractă (1.1) a fost studiată prin alte metode de mulți autori, între care amintim : V. Barbu [1, p. 252], [4]; V. Barbu și M. A. Malik [1]; M. G. Crandall, S.-O. Londen și J. A. Nohel [1]; ș.a. În lucrările acestora pot fi găsite de asemenea aplicații interesante care ilustrează importanța studierii ecuațiilor abstracte de tipul celor considerate în această secțiune.

§ 2. ECUAȚIA NELINIARĂ A UNDELOR

În acest paragraf vom analiza ecuația cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \partial^2 u/\partial t^2 - \Delta u + \beta(\partial u/\partial t) \ni f(t, x), & (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega \\ u(t,x) = 0, & (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \Gamma, \end{cases} \qquad (\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[), \tag{2.1}$$

unde

(I_1) Ω este o mulțime deschisă și mărginită în $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ cu frontiera Γ suficient de regulată și

(I_2) $\beta : D(\beta) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o aplicație maximal monotonă verificînd condiția $0 \in \beta(0)$.

Din punct de vedere fizic ecuația (2.1) constituie un model de descriere a vibrațiilor unei membrane (sau coarde) elastice cu frontiera fixată (respectiv capetele fixate) în prezența unei forțe de frînare $\beta(\partial u/\partial t)$ care depinde numai de viteză. Membrul secund $f(t, x)$ reprezintă o forță exterioară.

Considerăm spațiul (fazelor) $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dotat cu produsul scalar

$$(U_1, U_2)_H = \int_\Omega (\mathrm{grad}\ u_1(x), \mathrm{grad}\ u_2(x))_{\mathbf{R}^n}\ \mathrm{d}x + \int_\Omega v_1(x) v_2(x)\ \mathrm{d}x,$$

pentru orice $U_1 = [u_1, v_1]$, $U_2 = [u_2, v_2] \in H$.

După Propoziția 1.3 din Cap. I există o funcție $j : \mathbf{R} \to]-\infty, +\infty]$ proprie, convexă și semicontinuă inferior astfel încît $\beta = \partial j$. Deoarece $0 \in \beta(0)$ putem alege funcția j ca fiind definită de relația $j(r) = \int_0^r \beta^0(s)\,ds$, $r \in D(j)$ și atunci avem evident $\inf j = j(0) = 0$.

Să considerăm atunci funcția $\varphi : H_0^1(\Omega) \to]-\infty, +\infty]$ definită prin

$$\varphi(v) = \begin{cases} \int_\Omega j(v(x))\,dx, & \text{dacă } j \circ v \in L^1(\Omega) \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Evident φ este proprie, convexă și semicontinuă inferior (deoarece extensia funcției φ la $L^2(\Omega)$ este semicontinuă inferior relativ la topologia tare a lui $L^2(\Omega)$, conform Propoziției 1.5 din Cap. I). Se notează cu $\tilde{\beta}$ subdiferențiala funcției φ în dualitatea dintre $H_0^1(\Omega)$ și $H^{-1}(\Omega)$, adică $\beta : D(\tilde{\beta}) \subset H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ este definit prin

$$z \in \tilde{\beta}(v) \Leftrightarrow \varphi(v) - \varphi(w) \leqslant (v - w, z)_{H_0^1(\Omega),\, H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Evident $\tilde{\beta}$ este maximal monoton (vezi Teorema 1.12 și Observația 1.4 din Cap. I).

Laplaceanul $-\Delta$ este înțeles ca operatorul : $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definit de forma biliniară $a(v_1, v_2) = \int_\Omega (\operatorname{grad} v_1(x), \operatorname{grad} v_2(x))_{\mathbf{R}^n}\,dx$, $\forall v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ care este chiar produsul scalar pe $H_0^1(\Omega)$. Așadar $-\Delta$ coincide cu izomorfismul canonic dat de teorema de reprezentare a lui F. Riesz aplicată spațiului $H_0^1(\Omega)$.

Pe de altă parte să amintim că dacă $L^2(\Omega)$ se identifică cu dualul său atunci avem $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ în sens algebric și topologic. Prima scufundare are loc prin intermediul injecției canonice $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, în timp ce a doua scufundare se face prin intermediul aplicației adjuncte $i^* : (L^2(\Omega))' \equiv L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Pentru simplitate $i^*(w)$ se va nota tot w, pentru orice $w \in L^2(\Omega)$. În fine, mai remarcăm că $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ este compactă, conform teoremei lui Rellich-Kondrachov (vezi R. A. Adams [1. p. 143]). Prin urmare $i^* : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ este compactă, în virtutea teoremei lui Schauder (vezi K. Yosida [1, p. 282]), cu alte cuvinte $L^2(\Omega)$ este compact scufundat în $H^{-1}(\Omega)$.

Să considerăm acum operatorul $A : D(A) \subset H \to H$ definit prin

$$D(A) = \{[p, q] \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega);\ (-\Delta p + \tilde{\beta}(q)) \cap L^2(\Omega) \neq \emptyset\} \tag{2.3}$$

$$A([p, q]) = \{-q\} \times (-\Delta p + \tilde{\beta}(q)) \cap L^2(\Omega), \quad \forall [p, q] \in D(A). \tag{2.4}$$

Lema 2.1. (H. Brézis [5]). *Presupunem îndeplinite condițiile* (I_1) *și* (I_2). *Atunci operatorul* A *definit prin* (2.3), (2.4) *este maximal monoton.*

Demonstrație. Se verifică ușor că A este monoton. Pentru a demonstra maximalitatea lui A considerăm ecuația

$$Z + A(Z) \ni Z_0, \tag{2.5}$$

unde $Z_0 = [g, h]$ este o pereche arbitrară dar fixată în H. Mai întîi să observăm că operatorul $I - \Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ este continuu și tare pozitiv. Aici $I : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ reprezintă operatorul identitate sau, mai exact, operatorul de scufundare a spațiului $H_0^1(\Omega)$ în $H^{-1}(\Omega)$. Astfel, operatorul $I - \Delta + \tilde{\beta}$ este maximal monoton și fiind și tare monoton (deci coerciv) rezultă că $R(I - \Delta + \tilde{\beta}) = H^{-1}(\Omega)$. Pentru justificarea acestor afirmații a se vedea Teoremele 1.4′, 1.5′ și Observația 1.4, toate din Cap. I. Așadar există $q \in H_0^1(\Omega)$ astfel încît $q - \Delta q + \tilde{\beta}(q) \ni h + \Delta g$. Atunci, luînd $p = q + g$ se vede că perechea $Z = [p, q]$ este soluție pentru ecuația (2.5). Prin urmare A este într-adevăr maximal monoton. ∎

Observația 2.1. Dacă notăm

$$M = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times \{\xi \in H_0^1(\Omega);\ \tilde{\beta}(\xi) \cap L^2(\Omega) \neq \emptyset\}, \tag{2.6}$$

atunci este evident că $M \subset D(A)$.

Este cunoscut că (vezi (4.50) din Cap. II) închiderea mulțimii $\{\xi \in H_0^1(\Omega);\ \tilde{\beta}(\xi) \cap L^2(\Omega) \neq \emptyset\}$ în $L^2(\Omega)$ coincide cu mulțimea $\{\xi \in L^2(\Omega);\ \xi(x) \in \overline{D(j)}$, a.p.t. $x \in \Omega\}$. Așadar $\bar{M}^H = H_0^1(\Omega) \times \{\xi \in L^2(\Omega);\ \xi(x) \in \overline{D(j)}$, a.p.t. $x \in \Omega\}$. Deci, întrucît $M \subset D(A) \subset \bar{M}^H$, avem

$$\overline{D(A)}^H = \bar{M}^H = H_0^1(\Omega) \times \{\xi \in L^2(\Omega);\ \xi(x) \in \overline{D(j)},\ \text{a.p.t. } x \in \Omega\}. \tag{2.7}$$

Considerăm acum problema Cauchy

$$\begin{cases} dU/dt + A(U) \ni F(t), & 0 < t < T, \text{ în } H \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Dacă $F(t) = [0, f(t,.)]$ cu $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ și $U_0 = [u_0, v_0] \in \overline{D(A)}^H$ atunci, în baza Teoremei 2.2 din Cap. I, problema (2.8) admite o soluție slabă unică $U = U(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Dacă $f \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega))$ și $U_0 \in D(A)$, atunci $U = U(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, este chiar soluție tare (conform Teoremei 2.1 din Cap. I). Prima componentă a soluției slabe (tari) U, notată u, se va numi *soluție slabă* (respectiv *tare*) pentru ecuația (2.1) cu datele inițiale

$$u(0, x) = u_0(x),\ (\partial u/\partial t)(0, x) = v_0(x),\ x \in \Omega. \tag{2.9}$$

Astfel, putem enunța următoarea

Teorema 2.1 (Existență). *Presupunem îndeplinite ipotezele* (I_1) *și* (I_2). *Dacă* $[u_0, v_0] \in \overline{D(A)}^H$, *(vezi* (2.7) *și* $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ *atunci există o soluție slabă unică* $u(t,.)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *a ecuației* (2.1) *satisfăcînd* (2.9). *Dacă presupunem că* $[u_0, v_0] \in D(A)$ *și* $f \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega))$, *atunci* $u(t,.)$ *este chiar soluție tare în sensul indicat mai sus, ceea ce înseamnă că*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ și} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,.) - \Delta u(t,.) + \tilde{\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,.)\right) \ni f(t,.),\ \text{a.p.t. } t \in]0, T[, \tag{2.11}$$

în spațiul $L^2(\Omega)$

și u *verifică* (2.9).

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.2 (Regularitatea soluțiilor). *Presupunem îndeplinite ipotezele* (I_1) *și* (I_2). *Fie* $[u_0, v_0]$ *din mulțimea* M *definită prin* (2.6) *și* $f \in W^{1,1}(0,T; L^2(\Omega))$. *Fie* $u(t,.)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *soluția (tare) a problemei* (2.1), (2.9). *Atunci, pentru orice* $t \in [0,T[$,

$$u(t,.) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,.) \in H_0^1(\Omega) \text{ și} \tag{212}$$

$$\|\Delta u(t,.)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial t}(t,.) \right\|_{L^2(\Omega;\mathbf{R}^n)} \leqslant C, \tag{2.13}$$

unde C *este o constantă care depinde de* $\|\Delta u_0\|_{L^2,\Omega)}$, $\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}$,

$$\|f\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \text{ și } \|\partial f/\partial t\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Demonstrație. Presupunem în prima etapă că β este o aplicație lipschitziană pe $\mathbf{R}$. Să definim operatorul $A' : D(A') \subset H \to H$ astfel

$$D(A') = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$$

$$A'([p, q]) = [-q, \ -\Delta p + \overline{\beta}(q)], \ \forall [p, q] \in D(A'),$$

unde $\overline{\beta}$ este extensia canonică a aplicației β la $L^2(\Omega)$.

Evident A' este monoton. Pentru a verifica maximalitatea sa fixăm $[g, h] \in H$ și observăm întîi că ecuația

$$p - \Delta p + \overline{\beta}(p - g) = h + g \tag{2.14}$$

admite o soluție unică $p \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Pentru a justifica această afirmație amintim că operatorul $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ este maximal monoton. Apoi, operatorul $B : D(B) = L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definit prin $B(p) = \overline{\beta}(p - g)$, $\forall p \in L^2(\Omega)$. este maximal monoton. Astfel, în virtutea Teoremei 1.6 din Cap. I, operatorul $-\Delta + B : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ este maximal monoton. Deci ecuația (2.14) are într-adevăr o soluție unică $p \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Luînd atunci $q = p - g$ se observă că perechea $Z = [p, q]$ este soluție pentru ecuația $Z + A'(Z) = [g, h]$. Așadar A' este maximal monoton. Atunci deoarece $A' \subset A$ rezultă că A' coincide cu A, unde A este operatorul definit prin (2.3), (2.4). Astfel, u verifică (2.11) cu $\overline{\beta}$ în loc de $\tilde{\beta}$, adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right) \ni f(t, x) \text{ a.p.t. } (t, x) \in]0,T[\times \Omega. \tag{2.15}$$

Pe de altă parte, se poate arăta că

$$(\Delta_\lambda v, \overline{\beta}(v))_{L^2(\Omega)} \leqslant 0, \ \forall v \in L^2(\Omega), \ \forall \lambda > 0, \tag{2.16}$$

unde $\Delta_\lambda (\lambda > 0)$ reprezintă operatorul Laplace regularizat, adică $\Delta_\lambda = \Delta(I - \lambda\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Pentru orice $\lambda > 0$, Δ_λ este autoadjunct și comută cu Δ. Pentru a dovedi (2.16) să amintim relația (vezi (4.49) din Cap. II, §4), $(\Delta w, \overline{\beta}(w))_{L^2(\Omega)} \leqslant 0$, $\forall w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Prin urmare

$$(\Delta_\lambda v, \overline{\beta}((I - \lambda\Delta)^{-1} v))_{L^2(\Omega)} \leqslant 0, \ \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind monotonia operatorului $\overline{\beta}$ se poate scrie

$$(\overline{\beta}(v) - \overline{\beta}((I - \lambda\Delta)^{-1} v,\ v - (I - \lambda\Delta)^{-1} v)_{L^2(\Omega)} \geq 0,\ \forall v \in L^2(\Omega)$$

sau

$$(2.18)\qquad (\Delta_\lambda v, \overline{\beta}(v))_{L^2(\Omega)} \leq (\Delta_\lambda v, \overline{\beta}((I - \lambda\Delta)^{-1} v))_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in L^2(\Omega).$$

Din (2.17) și (2.18) se deduce evident (2.16).

Înmulțind acum ecuația (2.15) cu $-\Delta_\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right)$, integrînd în raport cu variabila x și ținînd cont de inegalitatea (2.16) se obține

$$(2.19)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta_\lambda \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta_\lambda u)_{L^2(\Omega)}\right\} \leq$$

$$\leq -\left(f, \Delta_\lambda \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)},\ \text{a.p.t. } t \in]0, T[,\ \lambda > 0.$$

Integrînd (2.19) de la 0 la t se deduce

$$(2.20)\qquad (\Delta u, \Delta_\lambda u)_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta_\lambda \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq (\Delta u_0, \Delta_\lambda u_0)_{L^2(\Omega)} - (v_0, \Delta_\lambda v_0)_{L^2(\Omega)} - 2\int_0^t \left(f(s,.), \Delta_\lambda \frac{\partial u}{\partial s}\right)_{L^2(\Omega)} ds$$

$$\leq \|\Delta u_0\|^2_{L^2(\Omega)} - (v_0, \Delta_\lambda v_0)_{L^2(\Omega)} - 2(f(t,.), \Delta_\lambda u)_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ 2(f(0,.), \Delta_\lambda u_0)_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,.), \Delta_\lambda u\right)_{L^2(\Omega)} ds,\ 0 \leq t \leq T,\ \lambda > 0.$$

Pe de altă parte, notînd $y_\lambda = (I - \lambda\Delta)^{-1} v$, $\lambda > 0$, $v \in H_0^1(\Omega)$ avem $y_\lambda - \lambda\Delta y_\lambda = v$.

Înmulțind scalar în $L^2(\Omega)$ cu Δy_λ ultima relație, obținem apoi ușor că mulțimea $\{y_\lambda;\ \lambda > 0\}$ este mărginită în $H_0^1(\Omega)$. De fapt, avem $y_\lambda \to v$, cînd $\lambda \to 0$, tare în $L^2(\Omega)$ și slab în $H_0^1(\Omega)$. Atunci

$$(2.21)\qquad \Delta_\lambda v = \Delta y_\lambda \to \Delta v,\ \text{cînd } \lambda \to 0,\ \text{slab stelat în } H^{-1}(\Omega).$$

Deoarece $(\Delta u, \Delta_\lambda u)_{L^2(\Omega)} \geq \|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)}$ urmează din (2.20) (în care se renunță pentru moment la termenul $-(\partial u/\partial t, \Delta_\lambda\ \partial u/\partial t)_{L^2(\Omega)}$) folosindu-se ipotezele

$$(2.22)\qquad \|\Delta_\lambda u(t,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{Const.},\ 0 \leq t < T,\ \lambda > 0.$$

Folosind din nou (2.20) deducem atunci

$$(2.23)\qquad \|\Delta_\lambda u(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,.), \Delta_\lambda \frac{\partial u}{\partial t}(t,.)\right)_{L^2(\Omega)} \leq \text{Const.},$$

$$0 \leq t < T,\ \lambda > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se ține seama de (2.21) se trece la limită în (2.23) se obține (2.13). Deoarece β a fost presupusă lipschitziană urmează că estimarea (2.13) are loc pentru cazul cînd β se înlocuiește prin aproximanta sa Yosida β_ε, $\varepsilon > 0$. Să notăm cu $U_\varepsilon(t) = \left[u_\varepsilon(t,.), \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t,.)\right]$ soluția problemei (2.8) în cazul cînd β se înlocuiește cu β_ε. Pentru a încheia demonstrația estimării (2.13) este suficient să arătăm că pentru orice $t \in [0, T[$

$$\left[u_\varepsilon(t,.), \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t,.)\right] \to \left[u(t,.), \frac{\partial u}{\partial t}(t,.)\right], \text{ cînd } \varepsilon \to 0, \text{ în } H. \tag{2.24}$$

Pentru a avea (2.24) este suficient să demonstrăm că

$$(I + \mu A^\varepsilon)^{-1}[g, h] \to (I + \mu A)^{-1}[g, h], \text{ cînd } \varepsilon \to 0, \tag{2.25}$$

în H, pentru orice $\mu > 0$ și $[g, h] \in \overline{D(A)}^H$,

după cum arată Teorema 2.6 din Cap. I. Am notat cu A^ε operatorul: $D(A') \subset H \to H$ definit prin $A^\varepsilon([p, q]) = [-q, -\Delta p + \overline{\beta}_\varepsilon(q)]$, $\forall [p, q] \in D(A^\varepsilon) = D(A')$. Desigur este suficient să demonstrăm (2.25) pentru $[g, h]$ dintr-o mulțime densă în $\overline{D(A)}^H$. De exemplu, fie $[g, h] \in M$, unde M este mulțimea definită prin (2.6). Însă (2.25) înseamnă tocmai că soluția $[p_\varepsilon, q_\varepsilon]$ a sistemului

$$\begin{cases} p_\varepsilon - \mu q_\varepsilon = g, \\ q_\varepsilon - \mu \Delta p_\varepsilon + \mu \overline{\beta}_\varepsilon(q_\varepsilon) = h, \end{cases} \tag{2.26}$$

converge în H, pentru $\varepsilon \to 0$, la soluția $[p, q]$ a sistemului

$$\begin{cases} p - \mu q = g, \\ q - \mu \Delta p + \mu \tilde{\beta}(q) = h. \end{cases} \tag{2.27}$$

Evident $p_\varepsilon, q_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Înmulțind scalar în $H_0^1(\Omega)$ cu p_ε prima ecuație din (2.26), apoi înmulțind scalar în $L^2(\Omega)$ cu q_ε a doua ecuație din (2.26) și adunînd deducem că: $\{p_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ este mărginită în $H_0^1(\Omega)$ și $\{q_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ este mărginită în $L^2(\Omega)$.

Revenind în prima ecuația a sistemului (2.26) vedem că de fapt mulțimea

$$\{q_\varepsilon; \varepsilon > 0\} \text{ este mărginită în } H_0^1(\Omega), \tag{2.28}$$

prin urmare

$$\{q_\varepsilon; \varepsilon > 0\} \text{ este relativ compactă în } L^2(\Omega). \tag{2.29}$$

Înmulțim scalar în $L^2(\Omega)$ a doua ecuație din (2.26) cu Δq_ε. Atunci, în virtutea relației (4.49) din Cap. II, § 4, rezultă $\mu(\Delta p_\varepsilon, \Delta q_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} \leqslant (q_\varepsilon - h, \Delta q_\varepsilon)_{L^2(\Omega)}$, $\varepsilon > 0$. Folosind și prima ecuație din (2.26) obținem $\|\Delta p_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$

$\leqslant (\Delta p_\varepsilon, \Delta g)_{L^2(\Omega)} - (h, \Delta q_\varepsilon)_{L^2(\Omega)}$, $\varepsilon > 0$, de unde rezultă, ținînd seama și de (2.28),

(2.30) $\{\Delta p_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ este mărginită în $L^2(\Omega)$.

Dci $\{\Delta p_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ este relativ compactă în $H^{-1}(\Omega)$. Întrucît operatorul $\Delta^{-1}: H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ este continuu urmează atunci că mulțimea

(2.31) $\{p_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ este relativ compactă în $H_0^1(\Omega)$.

Fie acum $\varepsilon_n \to 0$ astfel încît (vezi (2.29) și (2.31))

(2.32) $[p_{\varepsilon_n}, q_{\varepsilon_n}] \to [\hat{p}, \hat{q}]$, tare în H.

Atunci, ținînd seama de (2.30), avem

(2.33) $\Delta p_{\varepsilon_n} \to \Delta\hat{p}$, slab în $L^2(\Omega)$

și deci (vezi $(2.26)_2$)

(2.34) $\overline{\beta}_{\varepsilon_n}(q_{\varepsilon_n}) \to \frac{1}{\mu} h + \Delta\hat{p} - \frac{1}{\mu}\hat{q}$, slab în $L^2(\Omega)$.

Dar (2.34) arată că $(I + \varepsilon_n\overline{\beta})^{-1} q_{\varepsilon_n} - q_{\varepsilon_n} \to 0$, tare în $L^2(\Omega)$ deci (vezi (2.32))

(2.35) $(I + \varepsilon_n\overline{\beta})^{-1} q_{\varepsilon_n} \to \hat{q}$, tare în $L^2(\Omega)$.

Din (2.34) și (2.35) se deduce atunci, trecînd la limită, $\hat{q} - \mu\Delta\hat{p} + \mu\overline{\beta}(\hat{q}) = h$.

Așadar, $[\hat{p}, \hat{q}]$ verifică (2.27) (chiar cu $\overline{\beta}$ în loc de $\tilde{\beta}$), adică $[\hat{p}, \hat{q}] = [p, q]$. Limita fiind unică rezultă că de fapt avem $[p_\varepsilon, q_\varepsilon] \to [p, q]$, cînd $\varepsilon \to 0$, tare în H, adică tocmai ceea ce doream. Teorema 2.2 este acum demonstrată complet. ∎

Observația 2.2. În condițiile Teoremei 2.2 este clar că (2.11) are loc cu $\tilde{\beta}$ înlocuit prin $\overline{\beta}$ și u verifică (2.1) în sens obișnuit adică a.p.t. $(t, x) \in]0, T[\times \Omega$.

Notă bibliografică. Pentru alte proprietăți de regularitate a soluțiilor ecuației neliniare a undelor recomandăm V. Barbu [1, Cap. V, § 1].

Teorema 2.3. (Comportarea asimptotică). *Presupunem că ipotezele* (I_1) *și* (I_2) *sînt îndeplinite. Fie* $u(t, x)$, $t \geqslant 0$, *soluția slabă a problemei* (2.1), (2.9) *corespunzătoare unei perechi* $U_0 = [u_0, v_0] \in \overline{D(A)}^H$ *și unei funcții* $f(t, x) \in L^1(\mathbf{R}_+; L^2(\Omega))$. *Atunci*:

a) *Dacă* $0 \notin \mathrm{Int}\, \beta^{-1}(0)$ *și dacă se notează* $\beta^+ = \sup \beta(0)$, $\beta^- = \inf \beta(0)$, *există* $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ *astfel încît*

(2.36) $$\lim_{t \to +\infty} \left(\| u(t, .) - \zeta \|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, .) \right\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0,$$

cu

(2.37) $\beta^- \leqslant \Delta\zeta \leqslant \beta^+$ *(în sensul lui* $H^{-1}(\Omega)$*)*;

Scanned with OKEN Scanner

b) *Dacă* $0 \in \operatorname{Int} \beta^{-1}(0)$, *există* $\omega(t, x)$ *soluție slabă a ecuației*

$$\begin{cases} \partial^2\omega/\partial t^2 - \Delta\omega = 0, & (t, x) \in \mathbf{R} \times \Omega \\ \omega(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbf{R} \times \Gamma \end{cases} \tag{2.38}$$

astfel încît

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\| u(t,.) - \omega(t,.) \|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, .) - \frac{\partial \omega}{\partial t}(t,.) \right\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0 \tag{2.39}$$

și

$$\partial\omega/\partial t \in \beta^{-1}(0), \text{ a.p.t. } (t, x) \in \mathbf{R} \times \Omega. \tag{2.40}$$

Notă bibliografică. Teorema 2.1 este o ușoară generalizare la cazul neomogen a unui rezultat stabilit de A. Haraux [2, p. 225], [3].

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că pentru orice $(U_0, f) \in \overline{D(A)}^H \times L^1(\mathbf{R}_+ ; L^2(\Omega))$ soluția corespunzătoare $U(t)$, $t \geqslant 0$, pentru problema Cauchy (2.8) are orbita $\{U(t) ; t \geqslant 0\}$ relativ compactă în spațiul H. Ținînd seama de Propoziția 2.4 și Observația 2.7 din Cap. II se poate considera că (U_0, f) este într-o mulțime densă în $\overline{D(A)}^H \times L^1(\mathbf{R}_+ ; L^2(\Omega))$. De exemplu, putem lua $U_0 \in M$ și $f \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+ ; L^2\Omega))$, unde M este mulțimea definită prin (2.6). Atunci estimarea (2.13) ne spune că orbita $\{U(t) = [u(t,.), (\partial u/\partial t)(t,.)] ; t \geqslant 0\}$ este relativ compactă în H, adică tocmai ceea ce doream. Astfel, condițiile Teoremei 2.9 din Cap. II sînt îndeplinite. Prin urmare, pentru orice $U_0 = [u_0, v_0] \in \overline{D(A)}^H$ și $f \in L^1(\mathbf{R}^+ ; L^2(\Omega))$ soluția slabă corespunzătoare $U(t)$, $t \geqslant 0$, pentru problema (2.8) (luată pe $\mathbf{R}_+$) converge asimptotic, pentru $t \to \infty$, în H la o soluție aproape periodică $\tilde{U}(t) = \left[\zeta(t,.), \frac{\partial \zeta}{\partial t}(t,.) \right]$ a ecuației

$$\frac{dU}{dt}(t) + A(U(t)) \ni 0, \quad t \in \mathbf{R}, \text{ în } H. \tag{2.41}$$

Dacă $(U_0 f) \in D(A) \times W^{1,1}(\mathbf{R}_+ ; L^2(\Omega))$, atunci $\tilde{U}$ este chiar soluție tare. Prin urmare

$$\varphi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) - \varphi(w) \leqslant \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} - w, \ \Delta\zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)_{H_0^1(\Omega),\, H^{-1}(\Omega)}, \tag{2.42}$$

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \text{ a.p.t. } t \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $[0,0] \in A([0,0])$ rezultă tot din Teorema 2.9, Cap. II, că $\|\tilde{U}(t)\|_H \equiv \equiv \text{Const.}$, $t \in \mathbf{R}$. Astfel (2.42) devine

$$\varphi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) - \varphi(w) \leqslant \left(w, \ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \Delta\zeta\right)_{H_0^1(\Omega),\, H^{-1}(\Omega)}, \tag{2.43}$$

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \text{a.p.t. } t \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, pentru $w = 0$, se obține

(2.44) $\varphi(\partial\zeta/\partial t) \leqslant 0$, adică $\partial\zeta/\partial t \in \beta^{-1}(0)$ a.p.t. pe $\mathbf{R}\times\Omega$. ■

Avem atunci cazurile

a) Dacă $0 \notin \operatorname{Int}(\beta^{-1}(0))$, atunci $\partial\zeta/\partial t$ are semn constant. Deoarece $\tilde{U}(t)$ este aproape periodică, acest fapt nu este posibil decît dacă $\partial\zeta/\partial t \equiv 0$ Într-adevăr, funcția $g(t) = \int_\Omega \zeta(t, x)\,dx = \int_\Omega \zeta(0, x)\,dx + \int_0^t \left[\int_\Omega \frac{\partial\zeta}{\partial s}(s, x)\,dx\right] ds$ este aproape periodică și monotonă. Prin urmare $g(t) \equiv$ $\equiv$ Const., $t \in \mathbf{R}$ ceea ce implică $\partial\zeta/\partial t = 0$, $t \in \mathbf{R}$. Deci ζ este o funcție ce depinde numai de x, din $H_0^1(\Omega)$ și $\tilde{U}(t, x) = (\zeta(x), 0)$, $(t, x) \in \mathbf{R}\times\Omega$. Astfel din Teorema 2.9(jv), Cap. II se obține (2.36). Cum $(\zeta, 0)$ este o soluție de echilibru pentru ecuația (2.41) este clar că ζ verifică ecuația $\Delta\zeta \in \beta(0)$, în $H^{-1}(\Omega)$, adică (2.37) este verificată.

b) Dacă $0 \in \operatorname{Int}\beta^{-1}(0)$, atunci se consideră în relația (2.43) $w = \varepsilon\theta$ unde $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1$ și $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \beta^{-1}(0)$.

Astfel, în virtutea relațiilor (2.43) și (2.44), ζ verifică ecuația (2.38). Aplicînd din nou Teorema 2.9 (jv), Cap. II, se obține partea b) a Teoremei 2.3 cu $\omega = \zeta$.

Concluziile Teoremei 2.3 se extind printr-un simplu raționament de densitate la cazul general cînd $U_0 = [u_0, v_0] \in \overline{D(A)}^H$ și $f \in L^1(\mathbf{R}_+; L^2(\Omega))$. Astfel demonstrația Teoremei 2.3 este încheiată. ■

Observația 2.3. Un caz particular important al ecuației (2.1) este

(2.45) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) \ni f(t, x), & t > 0,\ x \in [0, l] \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Din punct de vedere fizic ecuația (2.45) descrie vibrațiile unei coarde elastice de lungime l fixată la capete pe o suprafață solidă perfect plană care se opune mișcării coardei cu o forță de frecare de mărime $\operatorname{sign}(\partial u/\partial t)$.

În acest caz $\Omega =]0, l[$ și la fel ca atunci cînd β este lipschitziană (vezi demonstrația Teoremei 2.2) se arată că

$$D(A) = [H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)] \times H_0^1(0, l),$$

$$A([p,q]) = [-q, -\mathrm{d}^2p/\mathrm{d}x^2 + \operatorname{sign} q],\ \forall [p,q] \in D(A)$$

și

$$A^{-1}([0,0]) = \{[\xi, 0];\ \xi \in W^{2,\infty}(0, l) \text{ și } \|d^2\xi/dx^2\|_{L^\infty(0,l)} \leqslant 1\}.$$

Astfel, ținînd cont de Teorema 2.3 se poate enunța

Propoziția 2.1. *Presupunem că* $f(t, x) \in L^1(\mathbf{R}_+; L^2(0, l))$. *Fie* $u(t, x)$, $t \geqslant 0$, *o soluție slabă a ecuației* (2.45). *Atunci, există* $\zeta \in W^{2,\infty}(0, l)$, *cu* $\|d^2\zeta/\mathrm{d}x^2\|_{L^\infty(0,l)} \leqslant 1$ *astfel încît*

$$\lim_{t\to\infty}\left(\|u(t,.) - \zeta\|_{H_0^1(0,l)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,.)\right\|_{L^2(0,l)}\right) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. O CLASĂ DE SISTEME CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP HIPERBOLIC

În acest paragraf vom studia în detaliu anumite probleme mixte asociate cu sisteme diferențiale neliniare de forma

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + A(u) \ni f(t, x),$$

$$\beta(x)\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + B(v) \ni g(t, x), \tag{3.1}$$

$$\text{pentru } 0 < x < 1 \text{ și } t > 0,$$

unde $A, B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sînt aplicații multivoce iar α și β sînt matrici diagonale, adică $\alpha = \text{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ și $\beta = \text{diag}\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$; funcțiile necunoscute u, v precum și membrii secunzi f, g sînt funcții vectoriale depinzînd de $(t,x) \in [0, +\infty[\times]0,1[$ și ale căror valori sînt vectori (coloană) din $\mathbf{R}^n$.

Vom asocia sistemului (3.1) condițiile inițiale

$$u(0, x) = u_0(x),\ v(0, x) = v_0(x), \text{ pentru } 0 < x < 1 \tag{3.2}$$

precum și condiții la limită de următoarele două feluri :

$$(u(t, 0), -u(t, 1)) \in L\,(v(t, 0), v(t, 1)),\ t > 0 \tag{3.3a}$$

(condiții la limită locale)

și

$$\begin{cases} u(t, 0) \in L_1(v(t, 0)), & t > 0 \\ -u(t, 1) \in C\dfrac{\partial v(t, 1)}{\partial t} + L_2(v(t, 1)) + e(t), & t > 0 \end{cases} \tag{3.3b}$$

(condiții la limită nelocale)

unde $L : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ și $L_1, L_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sînt aplicații neliniare maximal monotone, $C = \text{diag}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ este o matrice diagonală pozitivă iar $e : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ este o funcție dată. Am notat ca de obicei cu $\mathbf{R}_+$ semiaxa $[0, +\infty[$.

Ne propunem în cele ce urmează să cercetăm existența, regularitatea și comportarea asimptotică a soluțiilor pentru problemele mixte (3.1), (3.2), (3.3a) și (3.1), (3.2), (3.3b). Mai întîi cîteva cuvinte despre motivația acestui studiu. În primul rînd să remarcăm că generalitatea condițiilor la limită impuse permite cuprinderea multor condiții la limită clasice. De exemplu, dacă se consideră că aplicația L din (3.3a) este subdiferențiala funcției : $h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ definite prin

$$h(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x = a \text{ și } y = b \\ +\infty, & \text{în rest,} \end{cases}$$

unde a și b sînt vectori fixați în $\mathbf{R}^n$, atunci este ușor de văzut că (3.3a) înseamnă

$$v(t, 0) = a, \; v(t, 1) = b, \; t > 0 \; (\textit{condiții la limită bilocale}).$$

Un alt caz important este acela al alegerii aplicației L din (3.3a) drept subdiferențiala funcției $j : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ definite prin

$$j(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Un calcul elementar ne conduce la concluzia că în acest caz (3.3a) înseamnă

$u(t, 0) = u(t, 1)$ și $v(t, 0) = v(t, 1)$, $t > 0$ (*condiții la limită periodice*).

Subliniem de asemenea că foarte multe probleme care apar în fizică și tehnică pot fi privite drept cazuri particulare ale problemelor mixte (3.1), (3.2), (3.3a) și (3.1), (3.2), (3.3b) formulate mai sus. Cîteva exemple practice din hidraulică și din teoria rețelelor electrice vor fi analizate la sfîrșitul acestei secțiuni. De altfel, formularea condițiilor la limită (3.3b) a fost sugerată de anumite condiții la limită specifice teoriei rețelelor electrice. După cum vom observa mai tîrziu și alte condiții la limită de tip nelocal — deci condiții incluzînd ecuații diferențiale — pot fi tratate în cadrul teoriei pe care o dezvoltăm în cele ce urmează.

3.1. Rezultate de existență și regularitate

Să formulăm întîi cîteva ipoteze de bază care vor fi utilizate mai jos.

(a_1) $L : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este o aplicație maximal monotonă (posibil multivocă).

(a_2) $A : D(A) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este subdiferențiala unei funcții φ ($A = \partial \varphi$) unde $\varphi : \mathbf{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ este proprie, convexă și semicontinuă inferior. Despre B se presupune că este o aplicație de la $\mathbf{R}^n$ la $\mathbf{R}^n$, posibil multivocă, maximal monotonă și cu domeniul $D(B) = \mathbf{R}^n$. În plus, se presupune că este îndeplinită următoarea condiție de interioritate:

$$(*) \qquad [(\operatorname{Int} D(\varphi)) \times (-\operatorname{Int} D(\varphi))] \cap R(L) \neq \emptyset,$$

unde $D(\varphi) = \{r \in \mathbf{R}^n ; \varphi(r) < +\infty\}$ (domeniul efectiv al funcției φ) iar $R(L)$ înseamnă mulțimea valorilor aplicației L care apare în condiția la limită (3.3a).

(a_2)' Ambele aplicații A, $B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sînt maximal monotone cu domeniile $D(A) = D(B) = \mathbf{R}^n$.

(a_3) Toate funcțiile α_i, β_i (componentele diferite de funcția identic nulă ale matricilor diagonale α și β), $i = 1, 2, \ldots, n$, aparțin spațiului $L^\infty(0, 1)$ și în plus există o constantă reală $k_0 > 0$ astfel încît $\alpha_i(x) \geq k_0$, $\beta_i(x) \geq k_0$, a.p.t. $x \in]0,1[$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

(b_1) Aplicațiile $L_1 : D(L_1) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ și $L_2 : D(L_2) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sînt maximal monotone iar $C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ este o matrice diagonală constantă și pozitivă, adică $C_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

(b_2) $A : D(A) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este subdiferențiala unei funcții $\varphi : \mathbf{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ proprie, convexă și semicontinuă inferior iar B este o

Scanned with OKEN Scanner

aplicație maximal monotonă de la $\mathbf{R}^n$ la $\mathbf{R}^n$ cu $D(B) = \mathbf{R}^n$. În plus, se mai presupune că

(**) $\qquad (\text{Int } D(\varphi)) \cap R(L_1) \neq \emptyset$ și $(-\text{Int } D(\varphi)) \cap R(L_2) \neq \emptyset$.

Continuăm cu cîteva notații. Astfel, pentru $A = \partial\varphi$ se consideră operatorul $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset C([0,1]; \mathbf{R}^n) \to M(0,1; \mathbf{R}^n)$ definit prin

$$(3.4) \qquad \tilde{A}(p) = \left\{ \mu \in M(0,1; \mathbf{R}^n);\ \mu(p-q) \geqslant \int_0^1 \varphi(p(x))\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \varphi(q(x))\,dx, \quad \forall q \in C([0,1]; \mathbf{R}^n) \right\}$$

cu domeniul

$$(3.5) \qquad D(\tilde{A}) = \{p \in C([0,1]; \mathbf{R}^n);\ \tilde{A}(p) \neq \emptyset\}.$$

Amintim că $C([0,1]); \mathbf{R}^n)$ este spațiul funcțiilor $: [0,1 \to \mathbf{R}^n$ continue, dotat cu norma cu supremum, iar $M(0,1; \mathbf{R}^n)$ este dualul spațiului $C([0,1]); \mathbf{R}^n)$.

Dacă $B : D(B) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o aplicație maximal monotonă vom nota cu B $\bar{B}$ extensia canonică a lui la spațiul $L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$, adică, pentru $p,q \in L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$, avem : $p \in \bar{B}(q) \Leftrightarrow p(x) \in B(q(x))$, a.p.t. $x \in]0,1[$.

Metoda pe care o vom utiliza este aceeași ca cea din secțiunile precedente. Anume, fiecare din cele două probleme mixte enunțate mai su s va fi privită ca o problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială ordinară pe un spațiu de funcții convenabil ales. Astfel, pentru a studia problema mixtă (3.1), (3.2), (3.3a) vom considera ca spațiu de bază spațiul produs $X = L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$, dotat cu produsul scalar uzual, adică

$$\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}\right)_X = (p_1, p_2)_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)} + (q_1, q_2)_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)},$$

$$\forall \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in X.$$

Considerînd îndeplinite condițiile (a_1) și (a_2) vom defini un operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ care va juca un rol important în cadrul teoriei pe care o dezvoltăm mai jos în legătură cu problema (3.1), (3.2), (3.3a). Dar, înainte de aceasta, alte cîteva notații și precizări. Astfel, amintim că $BV(0,1; \mathbf{R}^n)$ este spațiul tuturor funcțiilor $\xi : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ cu variație mărginită. Pentru $\xi \in BV(0,1; \mathbf{R}^n)$ se notează cu $d\xi$ măsura generată de $\xi(d\xi \in M(0,1; \mathbf{R}^n))$. Este important să amintim acum că $L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ este un spațiu de clase de echivalență în $\mathcal{L}^2(0,1; \mathbf{R}^n) = \{\xi : [0,1] \to \mathbf{R}^n;$ ξ măsurabilă și $x \mapsto \|\xi(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2$ integrabilă Lebesgue pe $[0,1]\}$, relația de echivalență fiind egalitatea a.p.t. pe $[0,1]$ în raport cu măsura Lebesgue. Simbolurile $(.,.)_{\mathbf{R}^n}$ și $\|\cdot\|_{\mathbf{R}^n}$ notează ca de obicei produsul scalar uzual din $\mathbf{R}^n$ și respectiv norma euclidiană asociată din $\mathbf{R}^n$. Spațiul $L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ se consideră identificat cu dualul său. Dacă $\xi \in L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ are drept reprezentant o funcție continuă, atunci clasa ξ se identifică cu acest reprezentant. Astfel, are sens să vorbim despre valoarea $\xi(x)$, $\forall x \in [0,1]$. De asemenea, putem spune că $C([0,1]; \mathbf{R}^n) \subset L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \subset M(0,1; \mathbf{R}^n)$ în sens algebric și topologic. Prima scufundare are loc prin intermediul

Scanned with OKEN Scanner

injecției canonice $i : C([0,1]; \mathbf{R}^n) \to L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ în timp ce a doua scufundare se face prin intermediul aplicației adjuncte $i^* : (L^2(0,1; \mathbf{R}^n))' \equiv L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \to M(0,1; \mathbf{R}^n)$. Pentru simplitate $i^*(\xi)$ se va nota tot cu ξ, pentru orice $\xi \in L^2(0,1; (\mathbf{R}^n)$. Fie atunci

$$D(\mathscr{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X;\ p \in H^1(0,1; \mathbf{R}^n), \text{ clasa de echivalență } q \right. \tag{3.6}$$

conține cel puțin o funcție $q_1 \in BV(0,1; \mathbf{R}^n)$ și există cel puțin o măsură $\mu \in \tilde{A}(p)$ astfel încît : $(p(0), -p(1)) \in L(q_1(0), q_1(1))$ și $\mu - \mathrm{d}q_1 \in L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ $\left.\right\}$.

Pentru fiecare pereche $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$ se notează prin K_{pq} mulțimea tuturor măsurilor $\mathrm{d}q_1$ care apar în (3.6) și atunci definim pe $\mathscr{A}$ prin următoarea „formulă" :

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix};\ h \in (-K_{pq} + \tilde{A}(p)) \cap L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \right. \tag{3.7}$$

$$\left. \text{și } k \in -p' + \bar{B}(q) \right\}, \quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}),$$

unde p' înseamnă derivata distribuțională a lui p.

Observația 3.1. O întrebare naturală este cît de ample sînt mulțimile $K_{pq} \subset M(0,1; \mathbf{R}^n)$ care intervin în definiția operatorului $\mathscr{A}$. Să considerăm funcțiile $q_1, q_2 \in BV(0,1; \mathbf{R}^n)$ astfel încît q_1, q_2 să aparțină aceleiași clase de echivalență q în raport cu egalitatea a.p.t. pe $]0,1[$. Este imediat faptul că funcția $q_1 - q_2$ este identic egală cu zero pe mulțimea punctelor sale de continuitate. Atunci, conform cu F. Riesz și B.Sz.-Nagy [1, p. 111], urmează că q_1 și q_2 generează aceeași măsură, adică $\mathrm{d}q_1 = \mathrm{d}q_2$, dacă și numai dacă $q_1(0) = q_2(0)$ și $(q_1(1) = q_2(1)$. Cu alte cuvinte, contează numai valorile la capetele intervalului. Ceea ce putem spune este că, în general, pentru $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$ mulțimea K_{pq} are mai mult decît un element. Totuși, dacă, de exemplu, $L^{-1}(p(0), -p(1))$ are un singur element, atunci, ținînd seama de cele spuse mai sus, rezultă că mulțimea K_{pq} conține o singură măsură. De asemenea, dacă $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$ și în plus $q \in H^1(0,1; \mathbf{R}^n)$, atunci evident $K_{pq} = \{q'\}$. Continuăm cu un rezultat auxiliar.

Lema 3.1. *Presupunem că ipoteza* (a_1) *este îndeplinită. Atunci, operatorul* $Q : D(Q) \subset X \to X$ *definit prin*

$$D(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X;\ p, q \in H^1(0,1; \mathbf{R}^n) \text{ și} \right. \tag{3.8}$$

$$\left. (p(0), -p(1)) \in L(q(0), q(1)) \right\},$$

$$Q\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q' \\ -p' \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(Q), \tag{3.9}$$

este maximal monoton.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. O verificare elementară arată că Q este monoton. Pentru aceasta intervine în mod esențial faptul că L este aplicație monotonă. Rămîne de arătat maximalitatea lui Q. Cu alte cuvinte, rămîne de arătat că pentru fiecare pereche $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$ există o pereche $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(Q)$ astfel încît această pereche satisface următoarea problemă la limită

$$p - q' = h, \quad q - p' = k, \text{ în } L^2(0,1\,;\,\mathbb{R}^n), \tag{3.10}$$

$$(p(0), -p(1)) \in L(q(0), q(1)). \tag{3.11}$$

Vom căuta soluția problemei (3.10), (3.11) de forma $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$, unde perechea $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ va satisface problema

$$p_1 - q_1' = h, \; q_1 - p_1' = k \tag{3.12}$$

$$q_1(0) = q_1(1) = 0, \tag{3.13}$$

iar perechea $\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ va fi soluție pentru

$$p_2 - q_2' = 0, \qquad q_2 - p_2' = 0 \tag{3.14}$$

$$(p_2(0), -p_2(1)) \in L(q_2(0), \; q_2(1)) - (p_1(0), \; -p_1(1)). \tag{3.15}$$

Problema (3.12), (3.13) se rezolvă elementar. Astfel, adunînd și scăzînd în (3.12) se obțin prin integrarea ecuațiilor obținute $p_1 + q_1$ și $p_1 - q_1$, după care găsim

$$p_1(x) = p_0 \cdot \operatorname{ch} x - \int_0^x [\operatorname{sh}(x-s)\, h(s) + \operatorname{ch}(x-s) k(s)]\, ds,$$

$$q_1(x) = p_0 \cdot \operatorname{sh} x - \int_0^x [\operatorname{ch}(x-s)\, h(s) + \operatorname{sh}(x-s)\, k(s)]\, ds,$$

unde

$$p_0 = (\operatorname{sh} 1)^{-1} \int_0^1 [\operatorname{ch}(1-s) h(s) + \operatorname{sh}(1-s) k(s)]\, ds,$$

$$\operatorname{ch} x = (1/2)\,(e^x + e^{-x}), \; \operatorname{sh} x = (1/2)\,(e^x - e^{-x}).$$

Pe de altă parte, problema a doua, (3.14), (3.15), este echivalentă cu următoarea

$$q_2'' = q_2, \; 0 < x < 1 \tag{3.16}$$

$$(q_2'(0), -q_2'(1)) \in L_0(q_2(0), \; q_2(1)) \tag{3.17}$$

$$p_2 = q_2', \quad 0 < x < 1, \tag{3.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $L_0 : D(L) \subset \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ se definește prin $L_0(y, z) = L(y, z) - (p_1(0), -p_1(1))$, $\forall (y, z) \in D(L)$. Întrucît funcția $q_2(x) = e^x y + e^{-x} z$, $0 < x < 1$, satisface (3.16), pentru orice vectori constanți $y, z \in \mathbf{R}^n$, pentru a rezolva (3.16), (3.17) este suficient să găsim o pereche $(y, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ care satisface ecuația

$$(3.19) \qquad (y - z, -ey + (1/e) z) \in L_0(y + z, ey + (1/e) z).$$

Notăm $w_1 = y + z$, $w_2 = ey + (1/e) z$, $a = 2e/(1 + e^2)$ și $b = (e^2 - 1)/(e^2 + 1)$. Definim acum aplicația $T : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ în felul următor :

$$T(w_1, w_2) = (w_1 - aw_2, w_2 - aw_1), \quad \forall (w_1 w_2), \in \mathbf{R}^{2n}$$

După un calcul elementar (3.19) devine

$$(3.20) \qquad 0 \in T(w_1, w_2) + bL_0(w_1, w_2).$$

Se poate vedea ușor că T este o aplicație liniară pe $\mathbf{R}^{2n}$, continuă și tare pozitivă cu constanta $1 - a > 0$, adică

$$(T(w_1, w_2), (w_1, w_2))_{\mathbf{R}^{2n}} \geqslant (1 - a)(\|w_1\|^2_{\mathbf{R}^n} + \|w_2\|^2_{\mathbf{R}^n}), \quad \forall (w_1, w_2) \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Atunci, conform Teoremelor 1.4, 1.5 și 1.6 cu Observația 1.3 din Cap. I rezultă că $T + bL_0 : D(L) \subset \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este o aplicație surjectivă. Prin urmare (3.20) are o soluție, care este chiar unică, deoarece cum am spus T este tare pozitivă. Astfel, a rezultat că problema (3.16), (3.17), (3.18), care este echivalentă cu (3.14), (3.15), are o soluție unică $\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ cu p_2 și q_2 infinit derivabile. Este evident atunci că perechea $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ cu $p = p_1 + p_2$ și $q = q_1 + q_2$ este în $D(Q)$ și satisface (3.10), (3.11). Astfel, Lema 3.1 este complet demonstrată. ∎

Lema 3.2. *Presupunem că ipotezele* (a_1) *și* (a_2) *sînt îndeplinite. Atunci operatorul* $\mathscr{A} : D(A) \subset X \to X$ *definit prin* (3.6) *și* (3.7) *este maximal monoton.*

Demonstrație. Să arătăm întîi că $D(\mathscr{A})$ este o mulțime nevidă. Într-adevăr, în virtutea condiției de interioritate (*) există $y_1, z_1, y_2, z_2 \in \mathbf{R}^n$ astfel încît $y_1, z_1 \in \operatorname{Int} D(\varphi)$, $y_2, z_2 \in D(L)$ și $(y_1, -z_1) \in L(y_2, z_2)$. Să definim funcțiile p^* și q^* prin

$$(3.21) \qquad \begin{cases} p^*(x) = (1 - x) y_1 + x z_1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ q^*(x) = (1 - x) y_2 + x z_2, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Evident, mulțimea $M = \{p^*(x);\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ este compactă și $M \subset \operatorname{Int} D(\varphi) = \operatorname{Int} D(A)$. Deci, conform Observației 1.1 din Cap. I, mulțimea $A(M)$ este mărginită. Astfel este ușor de văzut acum că perechea $\begin{pmatrix} p^* \\ q^* \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$.

Să remarcăm în continuare că operatorul $\mathscr{A}$ este monoton. Verificarea acestui fapt este doar un exercițiu simplu care se bazează pe ipo-

teze și pe formula de integrare prin părți (F) din Cap. 0, § 5. Să dovedim acum maximalitatea operatorului $\mathscr{A}$, adică să arătăm că pentru fiecare pereche $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$ există $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$ astfel încît

$$(3.22) \qquad \begin{cases} p - K_{pq} + \widetilde{A}(p) \ni h, & \text{în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n), \\ q - p' + \widetilde{B}(q) \ni k, & \text{în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n). \end{cases}$$

Pentru $\lambda > 0$ să considerăm operatorul $\mathscr{C}_\lambda : X \to X$ definit prin $\mathscr{C}_\lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_\lambda(p) \\ \bar{B}_\lambda(q) \end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X$, unde $A_\lambda, B_\lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sînt aproximantele Yosida ale aplicațiilor A, B iar $\bar{A}_\lambda$, $\bar{B}_\lambda$ reprezintă extensiile canonice ale acestora la spațiul $L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$. Pentru fiecare $\lambda > 0$ operatorul $\mathscr{C}_\lambda$ este maximal monoton pe X cu $D(\mathscr{C}_\lambda) = X$. Prin urmare, conform Teoremei 1.6 cu Observația 1.3, Cap. I, pentru fiecare $\lambda > 0$, operatorul $Q + \mathscr{C}_\lambda : D(Q) \subset X \to X$ este maximal monoton, unde Q este definit prin (3.8), (3.9). Așadar, pentru fiecare $\lambda > 0$ și pentru fiecare pereche $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X$ există $\begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \end{pmatrix} \in D(Q)$ astfel încît

$$(3.23) \qquad \begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \end{pmatrix} + \mathscr{C}_\lambda \begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \text{ în } X.$$

Folosind un raționament standard se deduce din (3.23) că mulțimile

$$(3.24) \qquad \{p_\lambda; \lambda > 0\} \text{ și } \{q_\lambda; \lambda > 0\} \text{ sînt mărginite în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n).$$

Într-adevăr, considerînd o pereche $\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \in D(Q)$, înmulțind apoi scalar în X ecuația (3.23) prin $\begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ și folosind monotonia operatorului $Q + \mathscr{C}_\lambda$ se deduce afirmația (3.24). Explicitînd ecuația (3.23) putem scrie că p_λ, q_λ satisfac ecuațiile

$$(3.25) \qquad \begin{cases} p_\lambda - q'_\lambda + \bar{A}_\lambda(p_\lambda) = h, & \text{în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n), \\ q_\lambda - p'_\lambda + \bar{B}_\lambda(q_\lambda) = k, & \text{în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

împreună cu condițiile la limită

$$(3.26) \qquad (p_\lambda(0), -p_\lambda(1)) \in L(q_\lambda(0), q_\lambda(1)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțim acum ecuațiile (3.25) prin $p_\lambda - p^* - \varepsilon\xi_\lambda$ și respectiv $q_\lambda - q^* - \varepsilon\eta_\lambda$, unde p^*, q^* sînt funcțiile definite prin (3.21), $\varepsilon > 0$, este ales suficient de mic, iar funcțiile ξ_λ și η_λ sînt definite mai jos:

$$\xi_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{q'_\lambda(x)}{\|q'_\lambda(x)\|_{R^n}}, & \text{dacă } q'_\lambda(x) \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } q'_\lambda(x) = 0 \end{cases}$$

$$\eta_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{p'_\lambda(x)}{\|p'_\lambda(x)\|_{R^n}}, & \text{dacă } p'_\lambda(x) \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } p'_\lambda(x) = 0. \end{cases}$$

Prin urmare, avem

$$\varepsilon\int_0^1 (q'_\lambda, \xi_\lambda)_{R^n}\,dx = \int_0^1 ((q_\lambda - q^*)', p_\lambda - p^*)_{R^n}\,dx + \tag{3.27}$$

$$+\int_0^1 ((q^*)', (p_\lambda - p^*)_{R^n}\,dx + \int_0^1 (h - p_\lambda, p_\lambda - p^* - \varepsilon\xi_\lambda)_{R^n}\,dx -$$

$$-\int_0^1 (\bar{A}_\lambda(p_\lambda), p_\lambda - p^* - \varepsilon\xi_\lambda)_{R^n}\,dx, \ \forall\lambda > 0$$

împreună cu o egalitate asemănătoare pentru p'_λ obținută din a doua ecuație a sistemului (3.25) prin înmulțire cu $q_\lambda - q^* - \varepsilon\eta_\lambda$. Apoi, ținînd cont de (3.24) și de monotonia aplicației A_λ obținem din (3.27)

$$\varepsilon\int_0^1 (q'_\lambda, \xi_\lambda)_{R^n}\,dx \leqslant \int_0^1 ((q_\lambda - q^*)', p_\lambda - p^*)_{R^n}\,dx - \tag{3.28}$$

$$-\int_0^1 (\bar{A}_\lambda(p^* + \varepsilon\xi_\lambda), p_\lambda - p^* - \varepsilon\xi_\lambda)_{R^n}\,dx + \text{Const.}$$

Amintim că mulțimea $M = \{p^*(x);\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ este compactă și conținută în Int $D(A)$. Atunci, în virtutea condiției de interioritate (*) se obține pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic

$$\|A_\lambda(p^*(x) + \varepsilon\xi_\lambda(x))\|_{R^n} \leqslant \|A(p^*(x) + \varepsilon\xi_\lambda(x))\|_{R^n} \leqslant \text{Const., a.p.t. } x \in]0,1[.$$

Această estimare împreună cu (3.24) și (3.28) implică

$$\varepsilon\int_0^1 (q'_\lambda, \xi_\lambda)_{R^n}dx \leqslant \int_0^1 ((q_\lambda - q^*)', p_\lambda - p^*)_{R^n}\,dx + \text{Const.}, \ \forall\lambda > 0 \tag{3.29}$$

și $\forall\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Într-o manieră exact asemănătoare următoarea inegalitate rezultă din a doua ecuație a sistemului (3.25)

$$\varepsilon\int_0^1 (p'_\lambda, \eta_\lambda)_{R^n}\,dx \leqslant \int_0^1 (q_\lambda - q^*, (p_\lambda - p^*)')_{R^n}\,dx + \text{Const.}, \ \forall\lambda > 0 \tag{3.30}$$

> 0 și $\forall\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd inegalităţile (3.29) şi (3.30), ţinînd cont de (3.26) şi folosind ipoteza (a_1) rezultă că mulţimile

(3.31) $\{p'_\lambda ; \lambda > 0\}$ şi $\{q'_\lambda ; \lambda > 0\}$ sînt mărginite în $L^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$.

Pe de altă parte avem

(3.32) $$p_\lambda(x) = \int_0^1 [sp'_\lambda(s) + p_\lambda(s)]\, ds - \int_x^1 p'_\lambda(s)\, ds, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

precum şi relaţia asemănătoare pentru q_λ. Astfel, (3.24), (3.31) şi (3.32) implică

(3.33) $\{p_\lambda ; \lambda > 0\}$ şi $\{q_\lambda ; \lambda > 0\}$ sînt mărginite în $C([0,1] ; \mathbf{R}^n)$.

Mărginirea mulţimii $\{q_\lambda ; \lambda > 0\}$ în spaţiul $C([0,1] ; \mathbf{R}^n)$ implică în, virtutea faptului că $D(B) = \mathbf{R}^n$ (vezi a doua ecuaţie din sistemul (3.25)), că mulţimea

(3.34) $\{p'_\lambda ; \lambda > 0\}$ este mărginită în $L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$.

Din (3.33) şi (3.34) rezultă conform criteriului Arzelà-Ascoli că există $p \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ astfel încît

(3.35) $$p_\lambda \to p, \text{ pentru } \lambda \to 0, \text{ în } C([0,1]) ; \mathbf{R}^n)$$

pe un subşir. Deoarece nu există nici un pericol de confuzie vom scrie simplu în cele ce urmează $\lambda \to 0$ pentru a indica că un subşir al mulţimii de indici λ tinde la 0. De fapt, de fiecare dată cînd această limită apare un nou subşir al unuia precedent este considerat. Pentru $\{q_\lambda ; \lambda > 0\}$ nu putem obţine (3.35). Totuşi, ţinînd seama de (3.31) şi (3.33) rezultă în baza principiului lui Helly că există o funcţie $q_1 \in BV(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ astfel încît

(3.36) $$q_\lambda(x) \to q_1(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

Acest fapt împreună cu (3.33) implică în virtutea teoremei de convergenţă dominată a lui Lebesgue

(3.37) $q_\lambda \to q$, pentru $\lambda \to 0$, tare în $L^r(0,1 ; \mathbf{R}^n)$, pentru orice $r \in [1, +\infty[$,

unde q este clasa de echivalenţă a lui q_1, în timp ce clasa funcţiei q_λ a fost identificată chiar cu q_λ. Din (3.31), (3.35), (3.36) şi (3.37) (vezi, de asemenea, (3.25)) se deduce că, pentru $\lambda \to 0$,

(3.38) $p'_\lambda \to p'$, slab în $L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$,

(3.39) $q'_\lambda \to dq_1$, slab-stelat în $M(0,1 ; \mathbf{R}^n)$,

(3.40) $A_\lambda(p_\lambda) \to \mu$, slab-stelat în $M(0,1 ; \mathbf{R}^n)$,

unde $\mu = h - p + dq_1$ şi

(3.41) $B_\lambda(q_\lambda) \to \bar{B}(q)$, slab în $L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Precizăm că relația (3.39) rezultă trecînd la limită în egalitatea

$$q'_\lambda(w) = (q_\lambda(1),\ w(1))_{\mathbf{R}^n} - (q_\lambda(0),\ w(0))_{\mathbf{R}^n} - \int_0^1 (q_\lambda(x),\ w'(x))_{\mathbf{R}^n}\,dx, \quad \text{pentru}$$

orice $w \in H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$,

deci

$$\lim_{\lambda\to 0} q'_\lambda(w) = (q_1(1),\ w(1))_{\mathbf{R}^n} - (q_1(0),\ w(0))_{\mathbf{R}^n} - \int_0^1 (q(x),\ w'(x))_{\mathbf{R}^n}\,dx =$$

$$= dq_1(w), \quad \forall w \in H^1(0,1;\mathbf{R}^n).$$

Atunci (3.39) este evidentă prin densitatea spațiului $H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$ în $C([0,1];\mathbf{R}^n)$. Relația (3.41) rezultă din faptul că $\bar{B}$ este demicontinuu. Vom demonstra acum că $\mu \in \tilde{A}(p)$. Pentru aceasta introducem funcția $\Phi : L^2(0,1;\mathbf{R}^n) \to]-\infty, +\infty]$ definită prin

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \int_0^1 \varphi(\xi(x))\,dx, & \text{dacă } \varphi\circ\xi \in L^1(0,1) \\ +\infty, & \text{în rest} \end{cases}$$

despre care se știe că este proprie, convexă și semicontinuă inferior. Intenționăm acum să trecem la limită, pentru $\lambda \to 0$, în inegalitatea (vezi Teorema 1.14 din Cap. I)

$$(3.42)\qquad \int_0^1 (A_\lambda(p_\lambda(x)),\ p_\lambda(x) - w(x))_{\mathbf{R}^n}\,dx \geq \Phi_\lambda(p) - \Phi_\lambda(w) \geq$$

$$\geq (1/2\lambda)\int_0^1 \|p_\lambda(x) - (I+\lambda A)^{-1}(p_\lambda(x))\|^2_{\mathbf{R}^n}\,dx +$$

$$+ \Phi((I+\lambda A)^{-1}\circ p_\lambda) - \Phi(w), \text{ pentru orice } w \in D(\Phi).$$

Ținînd cont de (3.35) și (3.40) rezultă din (3.42) că

$$(3.43)\qquad p_\lambda - (I+\lambda A)^{-1}\circ p_\lambda \to 0, \text{ pentru } \lambda \to 0, \text{ tare în } L^2(0,1;\mathbf{R}^n).$$

Pentru a deduce (3.43) am mai folosit faptul că Φ este mărginită inferior de o funcție afină iar mulțimea $\{(I+\lambda A)^{-1}\circ p_\lambda;\ \lambda > 0\}$ este mărginită în spațiul $C([0,1];\mathbf{R}^n)$.

Rezultă atunci din (3.35) și (3.43) că $(I+\lambda A)^{-1}\circ p_\lambda \to p$, pentru $\lambda \to 0$, tare în $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$.

Folosind ultima relație și trecînd la limită, pentru $\lambda \to 0$, în inegalitatea (3.42), în care înlăturăm termenul nenegativ $(1/2\lambda)\int_0^1 \|p_\lambda(x) - (I+\lambda A)^{-1}(p_\lambda(x))\|^2_{\mathbf{R}^n}\,dx$, se obține $\mu(p-w) \geq \Phi(p) - \Phi(w)$. $\forall w \in C([0,1];\mathbf{R}^n)$, adică, într-adevăr, $\mu \in \tilde{A}(p)$. Folosind acum relațiile (3.35), (3.37), (3.38), (3.39), (3.40) și (3.41) se obține prin trecere la limită în sistemul (3.25)

$$\begin{cases} p - dq_1 + \mu = h \\ q - p' + \bar{B}(q) \ni k. \end{cases}$$

Prima ecuație din acest sistem este satisfăcută în spațiul $M(0,1;\mathbf{R}^n)$, dar cum h și $p \in L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$ urmează că $\mu - dq_1 \in L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$ și desigur ecuația este satisfăcută chiar în $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$. Pe de altă parte, folosind (3.35) și (3.36) se poate trece la limită în relația (3.26), pentru $\lambda \to 0$,

Scanned with OKEN Scanner

și deoarece L este o aplicație închisă (conform Propoziției 1.1 din Cap. I) se obține $(p(0), -p(1)) \in L(q_1(0), q_1(1))$. Recapitulînd faptele demonstrate se observă că am arătat că perechea $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ și satisface sistemul (3.22).

Prin urmare, Lema 3.2 este complet demonstrată. ■

Observația 3.2. Din demonstrația Lemei 3.2 s-a văzut de ce a fost nevoie de introducerea operatorului $\tilde{A}$. Am văzut că pentru mulțimea $\{A_\lambda \circ p_\lambda ; \lambda > 0\}$ nu am putut obține decît mărginirea sa în spațiul $L^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ și acest fapt a provenit din presupunerea restrictivă că $D(\varphi)$ nu este tot spațiul $\mathbf{R}^n$. O analiză atentă arată că din această cauză nu este îndeplinită condiția de echiintegrabilitate din criteriul de compactitate al lui Dunford —Pettis (vezi, de exemplu, R. Edwards [1, p. 374]) pentru a putea deduce relativa compactitate a mulțimii $\{A_\lambda \circ p_\lambda ; \lambda > 0\}$ măcar în $L^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$. De aceea, trebuie să ne mulțumim cu relativa sa compactitate în topologia slab-stelată (sau, cum i se mai spune, vagă) a spațiului $M(0,1 ; \mathbf{R}^n)$.

Operatorul $\tilde{A}$ mai apare, în contexte diferite de al nostru, în S. Aizicovici [1] precum și în M. Schatzman [1]. Conform cu A. D. Ioffe și V. L. Levin [1] sau R. T. Rockafellar [1] avem următorul rezultat:

Lema 3.3. *Fie* $A = \partial\varphi$, *unde* $\varphi : \mathbf{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ *este o funcție proprie, convexă și semicontinuă inferior. Atunci, dată măsura* $\mu \in \tilde{A}(p)$ *avem*

$$\mu_a(x) \in A(p(x)), \quad \text{a.p.t. } x \in]0,1[\text{ și} \tag{3.44}$$

$$\mu_s(p - w) \geqslant 0, \text{ pentru orice } w \in C([0,1] ; \mathbf{R}^n) \text{ cu proprietatea că } w(x) \in \overline{D(\varphi)} ; \ \forall x \in [0,1]. \tag{3.45}$$

Am notat cu μ_a *și* μ_s *partea absolut continuă și respectiv partea singulară a măsurii* μ (vezi Cap. 0, § 5).

Se pare că Lema 3.2 nu poate fi extinsă la cazul general cînd A este o aplicație maximal monotonă arbitrară. Deși $\tilde{A}$ ar putea fi definit în acest caz general ca extensia naturală a aplicației A la un operator acționînd de la $C([0,1] ; \mathbf{R}^n)$ la $M(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ am eșuat în încercarea de a extinde Lema 3.2. deoarece n-am putut obține relația $\mu \in \tilde{A}(p)$ ca mai sus. De asemenea, relațiile (3.44) și (3.45) care sînt importante pentru teoria existenței soluțiilor sînt bazate pe presupunerea $A = \partial\varphi$. Dacă însă A este o aplicație maximal monotonă peste tot definită atunci avem următorul rezultat.

Lema 3.4. *Presupunem că ipotezele* (a_1) *și* $(a_2)'$ *sînt îndeplinite. Atunci, operatorul* $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset X \to X$ *definit prin*

$$D(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X ; p, q \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n), (p(0), -p(1)) \in L(q(0), q(1)) \right\} \tag{3.46}$$

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} ; k \in -q' + \bar{A}(p), \ k \in -p' + \bar{B}(q) \right\}, \ \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathcal{B}) \tag{3.47}$$

este maximal monoton.

Demonstrație. Demonstrația se poate face prin raționamentele deja folosite pentru Lema 3.2. Să remarcăm numai că pentru a dovedi maximalitatea operatorului $\mathcal{B}$ se începe din nou cu problema la limită aproximativă (3.25), (3.26). În cazul de față, datorită ipotezei mai tari $(a_2)'$,

se obține informație mai bună în legătură cu mulțimea $\{q'_\lambda ; \lambda > 0\}$. Într-adevăr, deoarece $D(A) = \mathbf{R}^n$ urmează că A este mărginită pe mulțimi mărginite ca și B. Atunci, din (3.33) și prima ecuație a sistemului (3.25) rezultă că mulțimea $\{q'_\lambda ; \lambda > 0\}$ este mărginită în $L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$. Folosind criteriul lui Arzelà-Ascoli rezultă că există $q \in H^1(0, 1 ; \mathbf{R}^n)$ astfel încît, pe un subșir, $q_\lambda \to q$, tare în $C([0,1] ; \mathbf{R}^n)$. Restul demonstrației constă în trecerea la limită, pentru $\lambda \to 0$, în sistemul (3.25), (3.26). ■

Observația 3.3. O ușoară extensie a Lemei 3.2 se poate obține prin înlocuirea aplicației $A = \partial\varphi$ cu suma $A + P$, unde $P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o aplicație maximal monotonă cu $D(P) = \mathbf{R}^n$. Mai exact, se poate arăta că operatorul $\mathscr{E} : D(\mathscr{A}) \subset X \to X$ definit prin

$$\mathscr{E}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} ; \; h \in (-K_{pq} + \tilde{A}(p) + \bar{P}(p)) \cap L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n) \text{ și } k \in -p' + \bar{B}(q) \right\}, \quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{E}) = D(\mathscr{A}) \tag{3.48}$$

este maximal monoton, de îndată ce L, A și B satisfac condițiile (a_1) și (a_2). Notațiile folosite aici sînt aceleași ca în Lema 3.2. Demonstrația maximalității lui $\mathscr{B}$ se face plecînd de la sistemul (3.25), (3.26) cu $\bar{A}_\lambda + \bar{P}_\lambda$ în loc de $\bar{A}_\lambda$. O lăsăm în seama cititorului.

Teorema 3.1. *Presupunem că ipotezele* (a_1), (a_2) *și* (a_3) *sînt satisfăcute. Fie* $f, g \in W^{1,1}(0,T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$ *și fie* $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$ *definit prin* (3.6). *Atunci, există o pereche unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, u,v $W^{1,\infty}(0, T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$ *astfel încît* : u, v *satisfac* (3.2), (3.3a) ;

$$u, v \in L^\infty(]0, T[\times]0,1[; \mathbf{R}^n), \quad \partial u/\partial x \in L^\infty(0, T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)) ; \tag{3.49}$$

pentru fiecare $t \in [0, T]$, $v(t,.) \in BV(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ *și pentru fiecare* $t \in [0, T[$ *perechea* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *satisface sistemul* (3.1) a.p.t. $x \in]0,1[$, *unde* $\partial u/\partial t$ *și* $\partial v/\partial t$ *sînt înlocuite prin* $\partial^+ u/\partial t$ *și* $\partial^+ v/\partial t$. *In plus, pentru fiecare* $t \in [0, T]$ *partea singulară a funcției* $v(t,.)$ *satisface*

$$dv_s(t,.)(u(t,.) - w) \geqslant 0, \; \forall w \in C([0,1] ; \mathbf{R}^n) \text{ cu } w(x) \in \overline{D(\varphi)}, \; 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.50}$$

Prin $\partial^+ u/\partial t$ *și* $\partial^+ v/\partial t$ *am notat derivatele la dreapta ale funcțiilor* u,v : $[0, T[\to L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ *iar* $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ *reprezintă derivatele parțiale în raport cu* x.

Observația 3.4. În enunțul Teoremei 3.1 am identificat clasa $v(t,.)$ cu unul din reprezentanții săi care satisface (3.50) și împreună cu $u(t,.)$ verifică (3.3a). Acest fapt va fi justificat mai jos.

Demonstrația Teoremei 3.1. Pentru moment să presupunem că $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$ (matricea unitate de ordinul n), a.p.t. $x \in]0,1[$. Să considerăm în spațiul X introdus mai sus problema Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \mathscr{A}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \end{pmatrix}, \; 0 < t < T, \text{ în } X \tag{3.51}$$

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\mathscr{A}$ este operatorul definit prin (3.6), (3.7). Amintim că prin Lema 3.2 $\mathscr{A}$ este maximal monoton. Prin urmare, conform Teoremei 2.1 din Cap. I, problema (3.51), (3.52) admite o soluție tare unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in$ $\in W^{1,\infty}(0, T; X)$. Mai mult chiar, ecuația (3.51) cu $\mathrm{d}^+/\mathrm{d}t$ în loc de $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ este verificată pentru toți $t \in [0, T[$. Vom arăta că această pereche $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ este soluție pentru problema (3.1), (3.2), (3.3a) în sensul indicat în enunțul teoremei noastre, unde α și β au fost presupuse egale cu matricea unitate. Deoarece, pentru fiecare $t \in [0, T]$, $\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$, rezultă că, pentru fiecare $t \in [0,T]$, $u(t,.) \in H^1(0,1; \mathbf{R}^n)$, $v(t,.)$ conține o funcție $v^1(t,.) \in BV(0,1; \mathbf{R}^n)$ astfel încît $u(t,.)$, $v^1(t,.)$ satisfac condiția la limită (3.3a) și există o măsură $\mu(t) \in \tilde{A}(u(t,.))$ așa încît $\mu(t) - \mathrm{d}_x v^1(t,.) \in$ $\in L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$; mai mult, pentru fiecare $t \in [0, T[$ avem

$$(3.53) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^+ u}{\partial t}(t,.) - d_x v^1(t,.) + \mu(t) = f(t,.), \text{ în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \\ \dfrac{\partial^+ v}{\partial t}(t,.) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,.) + \bar{B}(v(t,.)) \ni g(t,.), \text{ în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n). \end{cases}$$

Prin $\mathrm{d}_x v^1(t,.)$ am notat măsura generată de funcția cu variație mărginită $v^1(t,.)$. Deoarece $\mu(t) - d_x v^1(t,.) \in L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ este evident că partea singulară a acestei măsuri este nulă, adică $\mu_s(t) = \mathrm{d}_x v_s^1(t,.)$, $\forall t \in [0, T]$, unde $v_s^1(t,.)$ este partea singulară a funcției $v^1(t,.)$.

În virtutea Lemei 3.3 enunțate mai sus precum și a ecuațiilor (3.53), se ajunge la concluzia că toate afirmațiile teoremei sînt dovedite, cu excepția proprietăților de regularitate notate în enunț cu (3.49). Pentru a demonstra și (3.49) să considerăm problemele Cauchy aproximative

$$(3.51)_\lambda \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \mathscr{A}^\lambda \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \end{pmatrix}, \; 0 < t < T, \text{ în } X$$

$$(3.52)_\lambda \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} (I + \mathscr{A}^\lambda)^{-1} \left(\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right), \text{ unde } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{A} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

pentru $\lambda > 0$, unde operatorul $\mathscr{A}^\lambda : D(Q) \subset X \to X$ este definit prin

$$\mathscr{A}^\lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q' + \bar{A}_\lambda(p) \\ -p' + \bar{B}_\lambda(q) \end{pmatrix}, \; \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}^\lambda) = D(Q).$$

$D(Q)$ este definită prin (3.8). Revizuind demonstrația Lemei 3.2 se poate trage concluzia că

$$(3.54) \quad (I + 0\mathscr{A}^\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} h_0 \\ k_0 \end{pmatrix} \to (I + 0\mathscr{A})^{-1} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \text{ pentru } \lambda \to 0, \text{ tare în } X,$$

$$\forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X \text{ și } \forall 0 > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru fiecare $\lambda > 0$, notăm cu $\begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix}$ soluția problemei $(3.51)_\lambda$, $(3.52)_\lambda$. Prin urmare avem

$$(3.55)\qquad \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ v_\lambda(t) \end{pmatrix} + \mathscr{A}^\lambda \begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ v_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \end{pmatrix},\ 0 \leqslant t < T,\ \text{în } X$$

$$(3.56)\qquad \begin{pmatrix} u_\lambda(0) \\ v_\lambda(0) \end{pmatrix} = (I + \mathscr{A}^\lambda)^{-1}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Din relațiile (3.54) și (3.56) deducem că

$$(3.57)\qquad \begin{pmatrix} u_\lambda(0) \\ v_\lambda(0) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},\ \text{pentru } \lambda \to 0,\ \text{tare în } X.$$

$$(3.58)\qquad \mathscr{A}^\lambda \begin{pmatrix} u_\lambda(0) \\ v_\lambda(0) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ \text{pentru } \lambda \to 0,\ \text{tare în } X.$$

Folosind acum estimarea (2.8), Cap. I, deducem că perechea $\begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix}$ verifică estimarea

$$(3.59)\qquad \left\| \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ v_\lambda(t) \end{pmatrix} \right\|_X \leqslant \left\| \mathscr{A}^\lambda \begin{pmatrix} u_\lambda(0) \\ v_\lambda(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(0,.) \\ g(0,.) \end{pmatrix} \right\|_X +$$

$$+ \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial s}(s,.) \\ \dfrac{\partial g}{\partial s}(s,.) \end{pmatrix} \right\|_X \mathrm{d}s,\ \text{pentru } 0 \leqslant t < T,\ \lambda > 0.$$

Relațiile (3.58) și (3.59) implică atunci că

$$(3.60)\qquad \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ \lambda > 0}} \left(\left\| \frac{\partial^+ u_\lambda}{\partial t}(t,.) \right\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} + \left\| \frac{\partial^+ v_\lambda(t,.)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} \right) < +\infty.$$

Pe de altă parte, deoarece sînt îndeplinite condițiile Teoremei 2.6 din Cap. I (vezi (3.54) și (3.57)), avem

$$(3.61)\qquad u_\lambda \to u \text{ și } v_\lambda \to v,\ \text{pentru } \lambda \to 0,\ \text{tare în } C([0,T];\ L^2(0,1;\ \mathbf{R}_n)),$$

unde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ este soluția problemei (3.51), (3.52). Ținînd cont de (3.60) și de faptul că $f,\ g \in W^{1,1}(0,\ T;\ L^2(0,1;\ \mathbf{R}^n))$ putem scrie că

$$(3.62)\qquad \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ \lambda > 0}} \left(\|m_\lambda(t,.)\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} + \|n_\lambda(t,.)\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} \right) < +\infty,$$

unde

$$(3.63)\qquad m_\lambda = -\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} + A_\lambda \circ u_\lambda,\ n_\lambda = -\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + B_\lambda \circ v_\lambda,\ t \in [0,T[,\ \text{a.p.t.}$$

$$x \in\ ]0,1[,\ \lambda > 0.$$

Deoarece A_λ și B_λ sînt aplicații lipschitziene rezultă în particular că distribuțiile $\partial u_\lambda/\partial x$, $\partial v_\lambda/\partial x$ sînt funcții din $L^\infty(0, T; L^2(0, 1; \mathbf{R}_n))$. În continuare vom valorifica din nou ideile din demonstrația Lemei 3.2 pentru a deduce mai întîi că

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\ \lambda>0}}\left(\left\|\frac{\partial u_\lambda(t,.)}{\partial x}\right\|_{L^1(1,0;\,\mathbf{R}^n)}+\left\|\frac{\partial v_\lambda(t,.)}{\partial x}\right\|_{L^1(1,0;\,\mathbf{R}^n)}\right)<+\infty. \tag{3.64}$$

Astfel, se înmulțesc scalar în $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$ ecuațiile (3.63) cu $u_\lambda(t,.)-p^*-\varepsilon\delta_\lambda(t,.)$ și respectiv cu $v_\lambda(t,.)-q^*-\varepsilon\theta_\lambda(t,.)$, unde p^*, q^* sînt funcțiile definite prin (3.21), $\varepsilon>0$ este ales suficient de mic (se va vedea mai jos cît de mic) iar $\delta_\lambda(t,.)$, $\theta_\lambda(t,.):]0,1[\to\mathbf{R}^n$ sînt funcțiile definite prin

$$\delta_\lambda(t,x)=\begin{cases}\left(1/\left\|\dfrac{\partial v_\lambda(t,x)}{\partial x}\right\|_{\mathbf{R}^n}\right)\dfrac{\partial v_\lambda(t,x)}{\partial x}, & \text{dacă } \dfrac{\partial v_\lambda(t,x)}{\partial x}\neq 0\\[2ex] 0, & \text{dacă } \dfrac{\partial v_\lambda(t,x)}{\partial x}=0\end{cases} \tag{3.65}$$

și

$$\theta_\lambda(t,x)=\begin{cases}\left(1/\left\|\dfrac{\partial u_\lambda(t,x)}{\partial x}\right\|_{\mathbf{R}^n}\right)\dfrac{\partial u_\lambda(t,x)}{\partial x}, & \text{dacă } \dfrac{\partial u_\lambda(t,x)}{\partial x}\neq 0\\[2ex] 0, & \text{dacă } \dfrac{\partial u_\lambda(t,x)}{\partial x}=0.\end{cases} \tag{3.66}$$

În acest mod se obține

$$\varepsilon\int_0^1\left(\frac{\partial v_\lambda(t,x)}{\partial x},\,\delta_\lambda(t,x)\right)_{\mathbf{R}^n}dx=\int_0^1(u_\lambda(t,x)-p^*(x), \tag{3.67}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_\lambda(t,x)-q^*(x))_{\mathbf{R}^n}\,dx+\int_0^1\left(\frac{dq^*(x)}{dx},\,u_\lambda(t,x)-p^*(x)\right)_{\mathbf{R}^n}dx+$$

$$+\int_0^1(m_\lambda(t,x),\,u_\lambda(t,x)-p^*(x)-\varepsilon\delta_\lambda(t,x))_{\mathbf{R}^n}\,dx-$$

$$-\int_0^1(A_\lambda(u_\lambda(t,x)),\,u_\lambda(t,x)-p^*(x)-\varepsilon\delta_\lambda(t,x))_{\mathbf{R}^n}\,dx,\ \forall t\in[0,T[,\ \forall\lambda>0,$$

împreună cu o egalitate similară pentru $\partial u_\lambda/\partial x$. Ținînd seama acum de relațiile (3.61), (3.62) și de monotonia aplicației A_λ se deduce din (3.67)

$$\varepsilon\int_0^1\left(\frac{\partial v_\lambda(t,x)}{\partial x},\,\delta_\lambda(t,x)\right)_{\mathbf{R}^n}dx\le\int_0^1\Big(u_\lambda(t,x)-p^*(x), \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_\lambda(t,x)-q^*(x))\Big)_{\mathbf{R}^n}dx-\int_0^1(A_\lambda(p^*(x)+\varepsilon\delta_\lambda(t,x)),\,u_\lambda(t,x)-$$

$$-p^*(x)-\varepsilon\delta_\lambda(t,x))_{\mathbf{R}^n}\,dx+\text{Const.},\ \forall t\in[0,T[,\ \forall\lambda>0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Datorită alegerii funcției p^* avem pentru $\forall t \in [0, T[$

(3.69) $\|A_\lambda(p^*(x) + \varepsilon\delta_\lambda(t, x))\|_{\mathbf{R}^n} \leqslant \|A(p^*(x) + \varepsilon\delta_\lambda(t, x))\|_{\mathbf{R}^n} \leqslant \text{Const.},$

(a.p.t. $x \in]0,1[$; $\forall\lambda > 0$; $\varepsilon > 0$ suficient de mic, întrucît evident există o mulțime compactă, să zicem M, cu $M \subset \operatorname{Int} D(A)$ astfel încît $\forall t \in [0, T[$ $p^*(x) + \varepsilon\delta_\lambda(t, x) \in M$, a.p.t. $x \in]0,1[$; $\forall\lambda > 0$; $\varepsilon > 0$. suficient de mic. Astfel, ținînd seama și de estimarea (3.69) rezultă din inegalitatea (3.68) că

(3.70) $$\varepsilon\int_0^1 \left(\frac{\partial v_\lambda(t, x)}{\partial x}, \delta_\lambda(t, x)\right)_{\mathbf{R}^n} dx \leqslant \int_0^1 \left(u_\lambda(t, x) - p^*(x), \frac{\partial}{\partial x}(v_\lambda(t, x) - q^*(x))\right)_{\mathbf{R}^n} dx + \text{Const.},$$

$\forall t \in [0, T[$; $\forall\lambda > 0$; $\varepsilon > 0$ suficient de mic.

În mod similar se obține estimarea

(3.71) $$\varepsilon\int_0^1 \left(\frac{\partial v_\lambda(t, x)}{\partial x}, \theta_\lambda(t,x)\right)_{\mathbf{R}^n} dx \leqslant \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}(u_\lambda(t, x) - p^*(x)), v_\lambda(t, x) - q^*(x)\right)_{\mathbf{R}^n} dx + \text{Const.},$$

$\forall t \in [0, T[$; $\forall\lambda > 0$; $\varepsilon > 0$ (cel ales mai sus).

Adunînd (3.70) la (3.71) rezultă

(3.72) $$\int_0^1 \left(\frac{\partial v_\lambda(t, x)}{\partial x}, \delta_\lambda(t, x)\right)_{\mathbf{R}^n} dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial u_\lambda(t, x)}{\partial x}, \theta_\lambda(t, x)\right)_{\mathbf{R}^n} dx \leqslant$$

$$\leqslant (1/\varepsilon)\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}(u_\lambda(t, x) - p^*(x)), v_\lambda(t, x) - q^*(x)\right)_{\mathbf{R}^n} dx + \text{Const.}, \forall t \in [0, T[,$$

$\forall\lambda > 0.$

Dar primul termen din membrul secund al inegalității (3.72) este $\leqslant 0$ deoarece

$$(p^*(0), -p^*(1)) \in L(q^*(0), q^*(1))$$

și

$$(u_\lambda(t, 0), -u_\lambda(t, 1)) \in L(v_\lambda(t, 0), v_\lambda(t, 1)), \forall t \in [0, T[, \forall\lambda > 0,$$

iar L este o aplicație monotonă. Astfel, relația (3.72) implică tocmai afirmația (3.64) pe care dorem s-o dovedim. Deoarece avem

(3.73) $$u_\lambda(t, x) = \int_0^1 \left[y\frac{\partial u_\lambda(t, y)}{\partial y} + u_\lambda(t, y)\right]dy - \int_x^1 \frac{\partial u_\lambda(t, y)}{\partial y}\, dy,$$

pentru $t \in [0, T[$, $x \in [0,1]$, $\lambda > 0$

și o formulă asemănătoare pentru v_λ rezultă din (3.61) și (3.64) că

(3.74) $\|u_\lambda(t, x)\|_{\mathbf{R}^n} + \|v_\lambda(t, x)\|_{\mathbf{R}^n} \leqslant \text{Const.}$, $t \in [0, T[$; $x \in [0,1]$, $\lambda > 0$.

Din a doua ecuație a sistemului (3.63) și din (3.62), (3.74) rezultă atunci că

(3.75) $$\sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ \lambda > 0}} \left(\left\|\frac{\partial u_\lambda(t, .)}{\partial x}\right\|_{L^2(0,1;\, \mathbf{R}^n)}\right) < +\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

(deoarece $D(B)=\mathbf{R}^n$ implică faptul că B este mărginită pe mulțimi mărginite. În fine, estimările (3.74), (3.75) implică, în virtutea lui (3.61), că proprietățile de regularitate notate în enunțul teoremei cu (3.49) sînt îndeplinite. Astfel, în cazul cînd $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$ teorema este demonstrată. În caz contrar se procedează în felul următor. Se împart pe rînd ecuațiile sistemului (3.1) prin $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$,..., $\alpha_n(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$,..., respectiv cu $\beta_n(x)$. Se consideră în locul spațiului X un nou spațiu de bază $X_{\alpha\beta} = L^2_{\alpha_1}(0,1) \times \ldots \times L^2_{\alpha_n}(0,1) \times L^2_{\beta_1}(0,1) \times \ldots \times L^2_{\beta_n}(0,1)$, unde $L^2_\rho(0,1)$ este spațiul L^2 cu ponderea ρ. Produsul scalar în $L^2(0,1)$ se definește prin

$$(p,\ q)_{L^2_\rho(0,1)} = \int_0^1 p(x)q(x)\rho(x)\mathrm{d}x,\ \forall p,\ q \in L^2_\rho(0,1).$$

Datorită condiției (a_3) spațiul $X_{\alpha\beta}$ coincide algebric și topologic cu spațiul X folosit mai sus. Operatorul $\mathscr{A}$ definit prin (3.6), (3.7) se înlocuiește prin

$\mathscr{A}_{\alpha\beta}: X_{\alpha\beta} \to X_{\alpha\beta}$ definit prin $\mathscr{A}_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n},\frac{1}{\beta_1},\ldots,\frac{1}{\beta_n}\right)\mathscr{A}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$,

cu $D(\mathscr{A}_{\alpha\beta}) = D(\mathscr{A})$. Monotonia operatorului $\mathscr{A}_{\alpha\beta}$ rezultă prin calcul elementar iar maximalitatea sa se verifică direct folosindu-se maximalitatea lui $\mathscr{A}$ pe spațiul X. Într-adevăr, fie $p, q \in X_{\alpha\beta}$ astfel încît $(w-q, z-p)_{X_{\alpha\beta}} \geqslant 0$, $\forall [z, w] \in \mathscr{A}_{\alpha\beta}$. Explicitînd această inegalitate și folosind maximalitatea operatorului $\mathscr{A}$ care este deja demonstrată prin Lema 3.2 se ajunge la $p \in D(\mathscr{A}) = D(\mathscr{A}_{\alpha\beta})$ și $q \in \mathscr{A}_{\alpha\beta}(p)$. Astfel, concluziile teoremei decurg la fel ca pentru cazul normalizat pornindu-se de la problema Cauchy (3.51), (3.52) cu $\mathscr{A}_{\alpha\beta}$ în loc de $\mathscr{A}$. Cu aceasta Teorema 3.1 este complet demonstrată. ■

Observația 3.5. Din demonstrația Teoremei 3.1 a rezultat că soluția $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ a problemei (3.1), (3.2), (3.3a) este aproximată de soluțiile problemelor aproximative $(3.51)_\lambda$, $(3.52)_\lambda$ în topologia spațiului $C([0, T]; L^2(0,1; \mathbf{R}^n))$. Acesta este un rezultat de convergență interesant și oarecum neobișnuit pentru că în acest caz $\mathscr{A}$ nu este aproximat prin obișnuitele aproximante Yosida. Demonstrația Teoremei 3.1 s-ar fi putut face plecînd de la început cu problemele $(3.51)_\lambda$, $(3.52)_\lambda$ și, după estimările necesare, s-ar fi putut trece la limită cu $\lambda \to 0$. Totuși am preferat să arătăm că $\mathscr{A}$ este maximal monoton deoarece acest fapt ne va folosi la studiul comportării asimptotice a soluțiilor.

Observația 3.6. Dacă se consideră ecuația a doua din (3.55) în spațiul $L^2(]0, T[\times]0,1[; \mathbf{R}^n)$, adică $\partial v_\lambda/\partial t - \partial u_\lambda/\partial x + B_\lambda \circ v_\lambda = g$ și se trece la limită, pentru $\lambda \to 0$, se obține că a doua ecuație a sistemului (3.1) (cu $\beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$) este verificată și a.p.t. $(t,x) \in]0, T[\times]0,1[$. La fel pentru cazul cînd $\beta(x)$ nu coincide cu I_n. Nu același lucru se poate afirma despre prima ecuație a sistemului (3.1).

Observația 3.7. În Teorema 3.1 rolurile aplicațiilor A și B ar putea fi inversate. Mai precis, ipoteza (a_2) se înlocuiește cu

(I_2) A este o aplicație maximal monotonă de la $\mathbf{R}^n$ la $\mathbf{R}^n$ cu $D(A) = \mathbf{R}^n$.

Despre B se presupune că este subdiferențiala unei funcții $\psi: \mathbf{R}^n \to]-\infty, +\infty]$, proprie, convexă și semicontinuă inferior. În plus

$[(\text{Int } D(\psi))(\text{Int } D(\psi))] \cap D(L) \neq \emptyset$.

Desigur, această schimbare implică inversarea proprietăților funcțiilor u și v, unde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ este soluția problemei (3.1), (3.2), (3.3a).

Observația 3.8. Cum s-a văzut din demonstrație, în enunțul Teoremei 3.1 trebuia spus de fapt că pentru fiecare t clasa de echivalență $v(t,.)$ conține o funcție $v^1(t,.) \in BV(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$ astfel încît, $u(t,.)$, $v^1(t,.)$ verifică împreună condițiile la limită (3.3a) și inecuația (3.50). Evident funcția $v^1(t,.)$ este determinată pînă la subclasa funcțiilor cu variație mărginită din clasa $v(t,.)$. Dacă, de exemplu, pentru un t, $L^{-1}(u(t,0), -u(t,1))$ are un singur element, atunci $v^1(t,.)$ este determinată pînă la subclasa funcțiilor cu variație mărginită care generează aceeași măsură (întrucît valorile în 0 și 1 sînt fixate prin (3.3a)). În general însă $L^{-1}(u(t,0), -u(t,1))$, pentru fiecare t, este o mulțime convexă care nu se reduce la un punct, astfel că pot exista mai multe funcții de tipul lui $v^1(t,.)$ care verifică (3.3a) împreună cu $u(t,.)$. Am putea afirma că condiția la limtă (3.3a) este satisfăcută într-un sens mai „slab" decît în cazul clasic. Acest lucru se datorează faptului că $D(\varphi)$ nu este tot spațiul $\mathbf{R}^n$. Această condiție restrictivă se reflectă și în gradul de regularitate al funcției v.

În altă ordine de idei, să menționăm că Teorema 3.2 se poate extinde de la cazul $A = \partial\varphi$ la cazul $A + P$, unde $P : D(P) = \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o aplicație maximal monotonă oarecare. Lăsăm în seama cititorului reformularea și demonstrația teoremei de existență în acest caz întrucît nu survin dificultăți esențiale.

Dacă ipoteza (a_2) se înlocuiește cu $(a_2)'$, atunci se obține un rezultat de existență și regularitate mai puternic și anume:

Teorema 3.2. *Presupunem că sînt îndeplinite ipotezele* (a_1), $(a_2)'$, (a_3). *Fie* $f,g \in W^{1,1}(0,T\,;\,L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n))$ *și fie* $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$, *unde* $D(\mathscr{B})$ *este mulțimea dată prin* (3.46). *Atunci, există o pereche unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, *cu* $u, v \in$ $\in W^{1,\infty}(0,T\,;L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n))$ *astfel încît*: u,v *satisfac* (3.2), (3.3a);

$$u,v \in L^\infty(]0,T[\times]0,1[\,;\mathbf{R}^n) \text{ și } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \in L^\infty(0,T\,;L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)) \tag{3.76}$$

pentru fiecare $t \in [0,T[$ *perechea* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *satisface sistemul* (3.1) a.p.t. $x \in$ $\in\,]0,1[$, *unde* $\partial u/\partial t$ *și* $\partial v/\partial t$ *sînt înlocuite prin* $\partial^+ u/\partial t$ *și* $\partial^+ v/\partial t$. *Notațiile sînt aceleași ca în enunțul Teoremei* 3.1.

Demonstrație. Se poate presupune fără a se restringe generalitatea că $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in\,]0,1[$. Justificarea acestei presupuneri este similară cu cea din demonstrația Teoremei 3.1. Demonstrația urmează în linii mari ideea folosită pentru Teorema 3.1. Astfel, fie din nou spațiul produs $X = L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n) \times L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$. Pe acest spațiu considerăm problema Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \mathscr{B}\begin{pmatrix} (u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \end{pmatrix},\ 0 < t < T, \tag{3.77}$$

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{3.78}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\mathscr{B}$ este operatorul definit prin (3.46), (3.47). Lema 3.4 afirma tocmai că $\mathscr{B}$ este maximal monoton pe X. Astfel, problema Cauchy (3.77), (3.78) admite o soluție tare unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}(0, T; X)$ sau $u, v \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(0,1; \mathbf{R}^n))$. Mai mult, $\forall t \in [0, T[$, $\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$ (deci, în particular, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ verifică (3.3a)) și ecuația (3.77), cu d^+/dt în loc de d/dt, este verificată pentru toți $t \in [0, T[$. Rămîn de arătat proprietățile de regularitate (3.76). Pentru aceasta se pot de asemenea exploata ideile din demonstrația Teoremei 3.1. Să observăm că în condițiile de față avem

$$(3.79) \qquad (I + \theta \mathscr{A}^\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \to (I + \theta \mathscr{B})^{-1} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \text{ pentru } \lambda \to 0, \text{ tare în } X,$$

$$\forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X \text{ și } \forall \theta > 0.$$

Considerăm din nou sistemul (3.55), (3.56), unde de data aceasta $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{B} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Continuînd ca în demonstrația Teoremei 3.1 se regăsesc relațiile (3.61), (3.74), (3.75). Mai mult, este adevărată evident și estimarea

$$(3.80) \qquad \sup_{\substack{0 \leqslant t < T \\ \lambda > 0}} \left(\left\| \frac{\partial v_\lambda(t,.)}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1; \mathbf{R}^n)} \right) < +\infty.$$

Toate acestea dovedesc (3.76). Astfel, teorema este complet demonstrată. ■

Observația 3.9. În condițiile Teoremei 3.2 soluția $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ satisface sistemul 3.1. a.p.t. $(t,x) \in]0, T[\times]0,1[$.

Observația 3.10. Presupunem că ipotezele Teoremei 3.1 sînt îndeplinite. Considerăm problema Cauchy

$$(3.81) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \mathscr{A}_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f_\alpha(t,.) \\ g_\beta(t,.) \end{pmatrix}, \ 0 < t < T, \text{ în } X_{\alpha\beta} \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

unde $X_{\alpha\beta}$ și $\mathscr{A}_{\alpha\beta}$ sînt definite în demonstrația Teoremei 3.1 iar f_α, g_β se definesc prin

$$f_\alpha(t,x) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1(x)}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n(x)} \right) f(t,x); \ g_\beta(t,x) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\beta_1(x)}, \ldots, \frac{1}{\beta_n(x)} \right) g(t,x).$$

Din demonstrația Teoremei 3.1 s-a văzut că o soluție pentru problema (3.1), (3.2), (3.3a) în sensul Teoremei 3.1 coincide cu o soluție tare pentru

problema (3.81). Dacă se consideră acum că (a_1), (a_2), (a_3) sînt îndeplinite și că $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \overline{D(\mathscr{A})}^X$ și $f,g \in L^1(0, T; L^2(0,1; \mathbf{R}^n))$, atunci, conform Teoremei 2.2 din Cap. I, problma (3.81) admite o soluție slabă unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0, T]; X)$(vezi Definiția 2.2, Cap. I), Atunci vom spune că această pereche de funcții $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ este o *soluție slabă* pentru problema (3.1), (3.2), (3.3a). Evident soluția slabă $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ nu satisface, în general, condiția la limită (3.3a), deoarece $\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \end{pmatrix}$ poate părăsi domeniul lui $\mathscr{A}_{\alpha\beta}$ (care coincide cu $D(\mathscr{A})$) .

În mod analog, în condițiile (a_1), $(a_2)'$, (a_3) putem vorbi de noțiunile de soluție tare și soluție slabă pentru problema (3.1), (3.2), (3.3a). În acest caz $\mathscr{A}_{\alpha\beta}$ se înlocuiește cu $\mathscr{B}_{\alpha\beta} : D(\mathscr{B}) \subset X_{\alpha\beta} \to X_{\alpha\beta}$ definit prin

$$B_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n}\right)\mathscr{B}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B}).$$

Ținîndu-se cont de Propoziția 3.1 de mai jos rezultă că în ipotezele (a_1), $(a_2)'$, (a_3) pentru existența soluției slabe pentru problema (3.1), (3.2), (3.3a) putem lua $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in X$ și $f,g \in L^1(0,T; L^2(0,1; \mathbf{R}^n))$.

Propoziția 3.1. *Presupunem că ipoteza* (a_1) *este îndeplinită. Atunci, mulțimea* $D(\mathscr{B})$ *definită prin* (3.16) *este densă în* $X = L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$.

Demonstrație. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}^n$ astfel încît $(a, -b) \in L(c, d)$. Considerăm funcțiile p și q definite prin : $p(x) = (1 - x)a + xb$ și $q(x) = (1 - x)c + xd$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Evident $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$. Mai mult, avem

$$[p + H_0^1(0,1; \mathbf{R}^n)] \times [q + H_0^1(0,1; \mathbf{R}^n)] \subset D(\mathscr{B}). \tag{3.82}$$

Deoarece $H_0^1(0,1; \mathbf{R}^n)$ este dens în $L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ rezultă din (3.82) că $\overline{D(\mathscr{B})}^X = X$. Astfel, Propoziția 3.1 este complet demonstrată. ■

În diverse aplicații condițiile la limită pot conține una sau mai multe ecuații diferențiale sau, mai general, integro-diferențiale. Evident, asemenea condiții nu pot fi scrise în forma (3.3a), deoarece (3.3a) este o relație algebrică. Cu scopul de a rezolva anumite probleme care apar în teoria liniilor electrice de transmisie ne vom ocupa în continuare de problema mixtă (3.1), (3.2), (3.3b).

Astfel, să admitem că sînt satisfăcute ipotezele (b_1) și (b_2). Considerăm spațiul produs $X_1 = L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$ dotat cu produsul scalar

$$\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (p_1, p_2)_{L^2(0,1; \mathbf{R}^n)} + (q_1, q_2)_{L^2(0,1; \mathbf{R}^n)} + (y_1, y_2)_{\mathbf{R}^n}.$$

În cele ce urmează vom păstra notațiile făcute mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Să definim acum operatorul $\mathscr{A}_1 : D(\mathscr{A}_1) \subset X_1 \to X_1$ în felul următor

(3.83) $D(\mathscr{A}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in X_1 ;\ p \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n),\right.$ clasa q conține cel puțin o funcție $q_1 \in BV(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ și există $\mu \in \tilde{A}(p)$ astfel încît : $\mu - dv_1 \in L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$, $y = q_1(1) \in D(L_2)$, $q_1(0) \in D(L_1)$ și $\left. p(0) \in L_1(q_1(0)) \right\}$.

Pentru fiecare $\begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1)$ se notează cu K_{pqy} mulțimea măsurilor dv_1 care intervin în definirea lui $D(\mathscr{A}_1)$ și atunci definim pe $\mathscr{A}_1$ prin „formula" :

(3.84) $\mathscr{A}_1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix};\ h \in (-K_{pqy} + \tilde{A}(p)) \cap L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n),\right.$

$\left. k \in -p' + \bar{B}(q) \text{ și } z \in L_2(y) + p(1) \right\}$, pentru orice $\begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1)$.

Să demonstrăm acum următorul rezultat auxiliar :

Lema 3.5. *În condițiile* (b_1) *și* (b_2) *operatorul* $\mathscr{A}_1$ *definit prin* (3.83) *și* (3.84) *este maximal monoton.*

Demonstrație. Monotonia operatorului $\mathscr{A}_1$ se verifică ușor folosind monotonia aplicațiilor A, B, L_1, L_2 precum și formula de integrare prin părți (F) din Cap. 0, § 5. Dovedirea maximalității lui $\mathscr{A}_1$ revine la a găsi, pentru fiecare $\begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix} \in X_1$, un triplet $\begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1)$ astfel încît

$$\begin{cases} p - K_{pqy} + \tilde{A}(p) \ni h, \text{ în } L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n) \\ q - p' + \bar{B}(q) \ni k, \quad \text{în } L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n) \\ y + L_2(y) + p(1) \ni z, \text{ în } \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Aceasta înseamnă că ar fi suficient să găsim $p \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ și $q \in L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ încît q conține $q_1 \in BV(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ și

(3.85) $$\begin{cases} p - dv_1 + \tilde{A}(p) \ni h, \text{ în } L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n), \\ q - p' + \bar{B}(q) \ni k, \text{ în } L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n), \end{cases}$$

(3.86) $$(p(0), -p(1)) \in L_0(q_1(0), q_1(1)),$$

unde $L_0 : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este aplicația multivocă definită prin

(3.87) $$D(L_0) = D(L_1) \times D(L_2)$$

(3.88) $$L_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix};\ \omega \in L_1(\xi) \text{ și } \theta - \eta + z \in L_2(\eta) \right\}.$$

Evident L_0 este o aplicație maximal monotonă. Ținînd cont de ipoteza (b_2) și de faptul că $R(L_0) = R(L_1) \times \mathbf{R}^n$ urmează că ipoteza (a_2) este îndeplinită cu $L = L_0$. Astfel, ca în demonstrația Lemei 3.2, urmează că problema (3.85), (3.86) are soluție unică. În particular, a rezultat desigur

Scanned with OKEN Scanner

că $D(\mathscr{A}_1)$ este o mulțime nevidă, fapt pe care nu-l demonstrasem nicăieri. Așadar, demonstrația Lemei 3.5 s-a redus la aceea a Lemei 3.2, deși problema pe care o studiem acum este diferită de precedenta. Ca urmare, demonstrația Lemei 3.5 se poate considera încheiată. ∎

Observația 3.11. Concluzia Lemei 3.5 rămîne adevărată dacă în locul condiției (b_2), (**) se presupune doar că : $(\mathrm{Int}\, D(\varphi)) \cap R(L_1) \neq \emptyset$. Acest fapt rezultă clar din demonstrația de mai sus.

Lema 3.6. *Presupunem că sînt îndeplinite ipotezele* (b_1) *și* $(a_2)'$. *Atunci operatorul* $\mathscr{B}_1 : D(\mathscr{B}_1) \subset X_1 \to X_1$ *definit prin*

$$D(\mathscr{B}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in X_1 ;\ p,\ q \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n),\ y = q(1) \in D(L_2), \right.$$

$$\left. q(0) \in D(L_1) \text{ și } p(0) \in L_1(q(0)) \right\}, \tag{3.89}$$

$$\mathscr{B}_1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix} \in X_1 ;\ h \in -q' + \bar{A}(p),\ k \in -p' + \bar{B}(q) \text{ și} \right.$$

$$\left. z \in L_2(y) + p(1) \right\}, \quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in D(D\mathscr{B}_1), \tag{3.90}$$

este maximal monoton.

Demonstrație. Monotonia lui $\mathscr{B}_1$ este doar un exercițiu simplu iar dovedirea maximalității se reduce la demonstrația Lemei 3.4. ∎

Teorema 3.3. *Presupunem că ipotezele* (b_1), (b_2) *și* (a_3) *sînt îndeplinite. Fie* $f, g \in W^{1,1}(0,\ T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$, $e \in W^{1,1}(0,\ T ; \mathbf{R}^n)$ *și fie* $u_0 \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ *și* $v_0 \in BV(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ *astfel încît* $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1)$, *unde* $D(\mathscr{A}_1)$ *este mulțimea definită prin* (3.83).

Atunci, există o pereche unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *cu* $u, v \in W^{1,\infty}(0, T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$ *astfel încît :*

(i) *u, v satisfac proprietățile de regularitate* (3.49) ;

(ii) $\forall t \in [0,\ T]$, $v(t,.) \in BV(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ *și* $v(.\,; 1) \in W^{1,\infty}(0,\ T ; \mathbf{R}^n)$

(iii) *u, v satisfac sistemul* (3.1) *în sensul Teoremei* 3.1 ;

(iv) *u, v satisfac* (3.2) *și pentru* $\forall t \in [0, T[$ *u, v satisfac condițiile la limită* (3.3b), *unde* $\partial v(t,1)/\partial t$ *se înlocuiește cu* $\partial^+ v(t,1)/\partial t$.

Observația 3.12. Ca și în Teorema 3.1 clasa $v(t,.)$ a fost identificată cu unul dintre reprezentanții săi. Vezi demonstrația de mai jos.

Demonstrația Teoremei 3.3. Presupunem pentru moment că $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$ și $C = I_n$. Considerăm pe spațiul X_1 definit mai sus problema Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \mathscr{A}_1 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \\ -e(t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < T \tag{3.91}$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix}. \tag{3.92}$$

Din Lema 3.5 operatorul $\mathscr{A}_1$ este maximal monoton. Să mai amintim că $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1)$. Ţinînd cont de asemenea de condiţiile impuse funcţiilor f, g şi e rezultă, conform Teoremei 2.1 din Cap. I, că există tripletul unic

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ y \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}(0,\ T;\ X_1) \text{ astfel încît } \forall t \in [0,T],\ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1)$$

şi acest triplet verifică, pentru toţi $t \in [0,\ T[$, ecuaţia (3.91) cu $\mathrm{d}^+/\mathrm{d}t$ în loc de $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Din aceste fapte rezultă următoarele. Pentru fiecare $t \in [0,\ T]$, $u(t,.) \in H^1(0,1;\ \mathbf{R}^n)$ iar $v(t,.)$ conţine o funcţie $v^1(t,.) \in BV(0,1;\ \mathbf{R}^n)$ astfel încît $y(t) = v^1(t,\ 1)$ şi $u(t,\ 0) \in L_1(v^1(t,\ 0))$. De asemenea,

$$u,\ v \in W^{1,\infty}(0,\ T;\ L^2(0,1;\ \mathbf{R}^n),\ v^1(t,\ 1) \in W^{1,\infty}\ 0,\ T;\ \mathbf{R}^n),$$

apoi, u, v satisfac condiţiile iniţiale (3.2). În sfirşit, din (3.91), cu $\mathrm{d}^+/\mathrm{d}t$ în loc de $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, urmează că pentru fiecare $t \in [0,T[$ există $\mu(t) \in \tilde{A}(t,.))$ astfel încît

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^+ u(t,.)}{\partial t} - d_x v^1(t,.) + \mu(t) = f(t,.), \text{ în } L^2(0,1;\ \mathbf{R}^n), \\ \dfrac{\partial^+ v(t,.)}{\partial t} - \dfrac{\partial u(t,.)}{\partial x} + \bar{B}(v(t,.)) \ni g(t,.), \text{ în } L^2(0,1;\ \mathbf{R}^n) \end{cases} \tag{3.93}$$

şi încă

$$-u(t,\ 1) \in \frac{\partial^+ v^1(t,\ 1)}{\partial t} + L_2(v^1(t,\ 1)) + e(t). \tag{3.94}$$

Pentru simplitate în enunţul teoremei am identificat funcţia $v^1(t,.)$ cu clasa sa $v(t,.)$, pentru fiecare t fixat. Raţionînd ca în demonstraţia Teoremei 3.1 rezultă (iii). Recapitulînd faptele demonstrate mai sus se observă că rămîne de arătat doar partea (i). Pentru aceasta să considerăm operatorul $\mathscr{A}_1^\lambda : X_1 \to X_1$, $\lambda > 0$, definit prin

$$D(\mathscr{A}_1^\lambda) = D(\mathscr{B}_1) \text{ (vezi (3.89))} \tag{3.95}$$

$$\mathscr{A}_1^\lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -q' + \bar{A}_\lambda(p) \\ -p' + \bar{B}_\lambda(q) \\ z \end{pmatrix};\ z \in p(1) + L_2(y) \right\}, \tag{3.96}$$

$$\forall \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1^\lambda),$$

unde A_λ, B_λ sînt obişnuitele aproximante Yosida ale aplicaţiilor A şi B iar $\bar{A}_\lambda$, $\bar{B}_\lambda$ reprezintă extensiile canonice la spaţiul $L^2(0,1;\ \mathbf{R}^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Din Lema 3.6 se deduce că pentru fiecare $\lambda > 0$ operatorul $\mathscr{A}_1^\lambda$ este maximal monoton. Afirmăm că pentru $\forall \theta > 0$ și pentru orice $\begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix} \in X_1$ avem

$$(3.97)\quad (I + \theta\mathscr{A}_1^\lambda)^{-1}\begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix} \to (I + \theta\mathscr{A}_1^\lambda)^{-1}\begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix}, \text{ pentru } \lambda \to 0, \text{ în } X_1.$$

Aceasta revine la a arăta că soluția $\begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \\ q_\lambda(1) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1^\lambda) = D(\mathscr{B}_1)$ a ecuației aproximative

$$(3.98)\quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} + \theta\mathscr{A}_1^\lambda\begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix}$$

converge în X_1, cînd $\lambda \to 0$, la soluția $\begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix}$ a ecuației

$$(3.99)\quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} + \theta\mathscr{A}_1\begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} h \\ k \\ z \end{pmatrix}.$$

Faptul că $\begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \\ q_\lambda(1) \end{pmatrix}$ verifică (3.98) se mai scrie echivalent astfel :

$$(3.100)\quad \begin{cases} p_\lambda - q_\lambda' + \theta\bar{A}_\lambda(p_\lambda) = h \\ q_\lambda - p_\lambda' + \theta\bar{B}_\lambda(q_\lambda) = k \end{cases}$$

$$(3.101)\quad \begin{cases} p_\lambda(0) \in L_1(q_\lambda(0)) \\ q_\lambda(1) + \theta L_2(q_\lambda(1)) + \theta p_\lambda(1) \ni z. \end{cases}$$

Demonstrația Lemei 3.2 aplicată problemei (3.100), (3.101) ne furnizează un rezultat mai puternic decît (3.97) și anume că

$$p_\lambda \to p, \text{ cînd } \lambda \to 0, \text{ în } C([0,1]; \mathbf{R}^n);$$
$$q_\lambda \to q \text{ cînd } \lambda \to 0, \text{ în } L^r(0,1; \mathbf{R}^n), \ \forall r \in [1, +\infty[$$

și

$$q_\lambda(1) \to y, \text{ cînd } \lambda \to 0, \text{ în } \mathbf{R}^n.$$

În continuare să considerăm problema aproximativă

$$(3.102)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \mathscr{A}_1^\lambda\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \\ -e(t) \end{pmatrix}, \ 0 < t < T, \text{ în } X_1 \\ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{t=0} = (I + \mathscr{A}_1^\lambda)^{-1}\begin{pmatrix} u_0 + p_0 \\ v_0 + q_0 \\ v_0(1) + y_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

unde

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_1 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix}.$$

În virtutea relației (3.97) avem

$$(3.103)\quad (I + \mathscr{A}_1^\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} u_0 + p_0 \\ v_0 + q_0 \\ v_0(1) + y_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix}, \text{ cînd } \lambda \to 0, \text{ în } X_1$$

și prin urmare

$$(3.104)\quad \mathscr{A}_1^\lambda \left((I + \mathscr{A}_1^\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} u_0 + p_0 \\ v_0 + q_0 \\ v_0(1) + y_0 \end{pmatrix} \right) \to \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ cînd } \lambda \to 0, \text{ în } X_1.$$

Pentru simplitatea scrierii am conideral că $\mathscr{A}_1^\lambda$ este univoc, adică L_2 este univoc. Pentru fiecare $\lambda > 0$, notăm cu $\begin{pmatrix} u_\lambda(t,.) \\ v_\lambda(t,.) \\ y_\lambda(t) \end{pmatrix}$ soluția problemei (3.102) (cu $\mathrm{d}^+/\mathrm{d}t$). De fapt $y_\lambda(t) = v_\lambda(t, 1)$, $\forall t \in [0, T]$. Deoarece pentru orice $\lambda > 0 A_\lambda$ și B_λ sînt lipschitziene urmează din (3.102) și proprietățile cunoscute ale soluției că, pentru fiecare $\lambda > 0$, $\partial u_\lambda/\partial x$ și $\partial v_\lambda/\partial x$ sînt funcții din $L^\infty(0,T\,;\, L^2((0,1\,;\, \mathbf{R}^n))$.

Teorema 2.1 din Cap. I aplicată problemei Cauchy (3.102) ne conduce la estimarea

$$\left\| \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} u_\lambda(t,.) \\ v_\lambda(t,.) \\ v_\lambda(t,1) \end{pmatrix} \right\|_{X_1} \leqslant \left\| \left(\mathscr{A}_1^\lambda \left((I + \mathrm{A}_1^\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} u_0 + p_0 \\ v_0 + q_0 \\ v_0(1) + y_0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} f(0,.) \\ g(0,.) \\ -e(0) \end{pmatrix} \right)^0 \right\|_{X_1} +$$

$$+ \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s,.) \\ \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(s,.) \\ -\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}s}(s) \end{pmatrix} \right\|_{X_1} \cdot \mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0, T[, \ \forall \lambda > 0.$$

În virtutea relației (3.104) și a condițiilor impuse funcțiilor f, g și e această estimare implică

$$(3.105)\quad \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ \lambda > 0}} \left\| \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} u_\lambda(t,.) \\ v_\lambda(t,.) \\ v_\lambda(t,1) \end{pmatrix} \right\|_{X_1} < +\infty.$$

Pe de altă parte, dacă se ține cont de (3.97) și (3.103) și se aplică Teorema 2.6 din Cap. I rezultă că

$$(3.106)\quad \begin{pmatrix} u_\lambda(t,.) \\ v_\lambda(t,.) \\ v_\lambda(t,1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \\ y(t), \end{pmatrix} \quad \text{pentru } \lambda \to 0, \text{ în } C([0, T]; X_1).$$

Limita din (3.106) este tocmai soluția problemei (3.91), (3.92).

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm că pentru fiecare $\lambda > 0$ u_λ și v_λ satisfac:

$$(3.107)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial v_\lambda(t,.)}{\partial x} + \bar{A}_\lambda(u_\lambda(t,.)) = f(t,.) - \dfrac{\partial^+ u_\lambda(t,.)}{\partial t}, \\ -\dfrac{\partial u_\lambda(t,.)}{\partial x} + \bar{B}_\lambda(v_\lambda(t,.)) = g(t,.) - \dfrac{\partial^+ v_\lambda(t,.)}{\partial t}, \end{cases}$$

pentru $0 \leqslant t < T$, în $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$,

$$(3.108)\quad \begin{pmatrix} u_\lambda(0,.) \\ v_\lambda(0,.) \\ v_\lambda(0,1) \end{pmatrix} = (I + \mathscr{A}_1^\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} u_0 + p_0 \\ v_0 + q_0 \\ v_0(1) + y_0 \end{pmatrix},$$

precum și condițiile la limită

$$(3.109)\quad \begin{cases} v_\lambda(t,0) \in L_1(v_\lambda(t,0)),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -v_\lambda(t,1) \in \dfrac{\partial^+ v_\lambda(t,1)}{\partial t} + L_2(v_\lambda(t,1.)) + c(t),\ 0 \leqslant t < T. \end{cases}$$

În continuare vom obține estimări pentru u_λ, v_λ și $\partial u_\lambda/\partial x$ prin adaptarea procedeului folosit în demonstrația Teoremei 3.1. Pentru aceasta vom alege funcțiile p^* și q^* în felul următor. Fie vectorii $y_1, z_1, y_2, z_2 \in \mathbf{R}^n$ astfel încît $y_1 \in [\operatorname{Int} D(\varphi)] \cap R(L_1)$, $z_1 \in [\operatorname{Int} D(\varphi)] \cap (-R(L_2))$, $y_2 \in L_1^{-1}(y_1)$ și $z_2 \in L_2^{-1}(-z_1)$. Atunci p^* și q^* se definesc ca la (3.21), adică:

$$p^*(x) = (1-x)y_1 + xz_1,\ q^*(x) = (1-x)\,y_2 + xz_2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Procedînd ca în demonstrația Teoremei 3.1 se obține din nou estimarea (3.72). Ținînd seama de (3.105), (3.106), (3.109) și de condițiile $p^*(0) \in L_1(q^*(0))$, $-p^*(1) \in L_2(q^*(1))$ obținem

$$(3.110)\quad \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}(u_\lambda(t,x) - p^*(x)) \right), (v_\lambda(t,x) - q^*(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\partial^+ v_\lambda(t,1)}{\partial t} - q^*(1) - v_\lambda(t,1) \right), _{\mathbf{R}^n} \leqslant \text{Const.},\quad \forall t \in [0,T[,\ \forall \lambda > 0.$$

Din (3.72) și (3.110) se obține din nou estimarea (3.64) și apoi pe rînd (3.74), (3.75) care conduc în final la (3.49). Astfel, în cazul normalizat $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$ și $C = I_n$ teorema este complet demonstrată. Cazul general se reduce la cel normalizat în felul următor. Se împart pe rînd ecuațiile sistemului (3.1) prin $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)$ și apoi ecuațiile diferențiale din condițiile la limită (3.3b) prin $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Se consideră noul spațiu $\tilde{X}_1 = X_{\alpha\beta} \times \tilde{\mathbf{R}}^n$, unde $X_{\alpha\beta}$ este spațiul definit la sfîrșitul demonstrației Teoremei 3.1 iar $\tilde{\mathbf{R}}^n$ este $\mathbf{R}^n$ dotat cu produsul scalar

$$\langle y, z \rangle_{\mathbf{R}^n} = \sum_{i=1}^n C_i y_i z_i,\quad \forall y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

În locul operatorului $\mathscr{A}_1$ se consideră operatorul $\tilde{\mathscr{A}}_1 : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_1$ definit prin

$$D(\tilde{\mathscr{A}}_1) = D(\mathscr{A}_1),$$

$$\tilde{\mathscr{A}}_1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{C_1}, \ldots, \frac{1}{C_n}\right) \mathscr{A}_1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix},$$

$$\forall \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1).$$

Operatorul $\tilde{\mathscr{A}}_1$ este maximal monoton pe spațiul $\tilde{X}_1$ și toate concluziile teoremei rămîn adevărate. ■

Observația 3.13. Presupunem că sînt îndeplinite toate ipotezele Teoremei 3.3 cu excepția condiției (**) din (b_2) care se înlocuiește cu una mai slabă și anume : $(\operatorname{Int} D(\varphi)) \cap R(L_1) \neq \emptyset$. Atunci, cum am remarcat mai sus, $\mathscr{A}_1$ rămîne maximal monoton și, revizuind demonstrația Teoremei 3.3, rezultă că toate concluziile acesteia rămîn valabile cu excepția proprietăților de regularitate (3.49) (sau partea (i) a teoremei).

Observația 3.14. În Teorema 3.3 se pot inversa rolurile aplicațiilor A și B și anume se poate presupune că $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o aplicație maximal monotonă peste tot definită pe $\mathbf{R}^n$ iar B este subdiferențiala unei funcții $\psi : \mathbf{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ proprie, convexă și semicontinuă inferior. În plus : $(\operatorname{Int} D(\psi)) \cap D(L_1) \neq \emptyset$ și $(\operatorname{Int} D(\psi)) \cap D(L_2) \neq \emptyset$. Atunci are loc o teoremă de existență simetrică cu Teorema 3.3 în care u și v își inversează proprietățile.

Dacă în Teorema 3.3 ipoteza (b_2) se înlocuiește cu ipoteza $(a_2)'$, atunci se obține un rezultat mai puternic, anume :

Teorema 3.4. *Presupunem că sînt îndeplinite ipotezele* (b_1), $(a_2)'$ *și* (a_3). *Fie* $f, g \in W^{1,1}(0, T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$, $e \in W^{1,1}(0, T ; \mathbf{R}^n)$ *și fie* $u_0, v_0 \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ *astfel încît* $v_0(1) \in D(L_2)$, $v_0(0) \in D(L_1)$ *și* $u_0(0) \in L_1(v_0(0))$. *Atunci, există o pereche unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *cu* $u, v \in W^{1,\infty}(0, T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$ *astfel încît :*

$$u, v \in L^\infty(]0, T[\times]0,1[) ; \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \in]L^\infty(0, T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)) ;$$

$$v(.,1) \in W^{1,\infty}(0, T ; \mathbf{R}^n) ;$$

pentru fiecare $t \in [0, T[$, u, v *satisfac sistemul* (3.1) *(cu* $\partial^+ u/\partial t$*) și* $\partial^+ v/\partial t$*) precum și condițiile la limită* (3.3b) $\left(cu \ \frac{\partial^+ v(t,1)}{\partial t}\right)$. *În plus* u, v *satisfac condițiile inițiale* (3.2).

Demonstrație. Se urmează aceeași cale ca în demonstrația Teoremei 3.3, înlocuindu-se operatorul $\mathscr{A}_1$ cu operatorul $\mathscr{B}_1$ definit prin (3.89), (3.90) despre care Lema 3.6 afirmă că este maximal monoton. În acest caz se obține în plus că v_λ satisface o estimare de tipul lui (3.75) ceea ce conduce la proprietatea suplimentară de regularitate : $\partial v/\partial x \in L^\infty(0, T ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$. Întrucît tehnica folosită pentru Teorema 3.3 se poate repeta sau adapta la situația de față lăsăm în seama cititorului continuarea demonstrației. ■

Scanned with OKEN Scanner

Observația 3.15. Am considerat condițiile la limită (3.3b) deoarece am avut în minte aplicațiile din teoria rețelelor electrice, dar putem considera și alte tipuri de condiții la limită, tot globale, astfel încît problemele corespunzătoare se pot rezolva într-o manieră asemănătoare celei de mai sus. De exemplu :

$$(3.3c)\quad \begin{pmatrix} u(0,t) \\ -u(1,t) \end{pmatrix} \in N \begin{pmatrix} (\partial v/\partial t)(0,t) \\ (\partial v/\partial t)(1,t) \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} v(0,t) \\ v(1,t) \end{pmatrix} + h(t),\ 0 < t < T,$$

unde $N = \operatorname{diag}(N_1, N_2, \ldots, N_{2n})$ cu $N_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, 2n$; $P : D(P) \subset \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ este o aplicație maximal monotonă, iar $h :]0, T[\to \mathbf{R}^{2n}$ este o funcție dată.

Pentru soluționarea problemei (3.1), (3.2), (3.3c) se alege ca spațiu de bază $X_2 = L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Presupunem, de exemplu, că sînt îndeplinite ipotezele (b_1) și $(a_2)'$. În locul operatorului $\mathscr{B}_1$ se consideră un alt operator $\mathscr{B}_2 : D(\mathscr{B}_2) \subset X_2 \to X_2$ definit prin

$$(3.111)\quad D(\mathscr{B}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X_2 ;\ p, q \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n) \text{ și } \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \end{pmatrix} \in D(P) \right\}$$

$$(3.112)\quad \mathscr{B}_2 \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \\ w \\ r \end{pmatrix} \in X_2 ;\ h \in -q' + \bar{A}(p),\ k \in -p' + \bar{B}(q), \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} w \\ r \end{pmatrix} \in P \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p(0) \\ -p(1) \end{pmatrix} \right\},\ \forall \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B}_2).$$

Nu este dificil de văzut că maximala monotonie a operatorului $\mathscr{B}_2$ în spațiul X_2 se reduce la maximala monotonie în $X = L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ a unui operator de tipul lui $\mathscr{B}$ definit prin (3.46), (3.47). Atunci se pot deduce rezultate de existență și regularitate pentru problema mixtă (3.1), (3.2), (3.3c) prin exprimarea acesteia sub forma unei probleme Cauchy asociate operatorului $\mathscr{B}_2$.

Se mai pot considera condiții la limită globale de tipul următor : m condiții sînt ecuații diferențiale ($0 < m < 2n$, $m \neq n$) iar celelalte $2n - m$ sînt condiții la limită locale (condiții algebrice). Pentru a nu lungi expunerea nu vom insista în analiza problemelor asociate acestor tipuri de condiții la limită. Menționăm numai că instrumentul de lucru este în esență cel folosit pînă acum.

Observația 3.16. Considerăm pe spațiul X_1 problema Cauchy

$$(3.113)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \tilde{\mathscr{A}}_1 \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} (\alpha(.))^{-1} f(t,.) \\ (\beta(.))^{-1} g(t,.) \\ -C^{-1} e(t) \end{pmatrix},\ 0 < t < T \\ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Presupunem că sînt îndeplinite condițiile Teoremei 3.3. Eventual (**) din (b_2) se înlocuiește cu condiția mai slabă : $(\operatorname{Int} D(\varphi)) \cap R(L_1) \neq \emptyset$. Vezi Observația 3.13. Evident în acest caz $y_0 = v_0(1)$.

După cum s-a văzut în demonstrația Teoremei 3.3, problema (3.113) admite o soluție tare $\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \\ v(t,1) \end{pmatrix}$. Atunci vom spune că perechea $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ este *soluție tare* pentru problema (3.1), (3.2), (3.3b). De fapt, aceasta este soluția furnizată de Teorema 3.3

Presupunem acum că (b_1), (b_2) și (a_3) sînt îndeplinite,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \overline{D(\mathscr{A}_1)}^{X_1} \text{ și } \begin{pmatrix} f \\ g \\ e \end{pmatrix} \in L^1(0, T; X_1).$$

Atunci (3.113) admite o soluție slabă $\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \\ y(t) \end{pmatrix} \in C([0, T]; X_1)$. Vom spune atunci că $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ este *soluție slabă* pentru problema (3.1), (3.2) (3.3b).

În mod analog se definesc conceptele de *soluție tare* și *soluție slabă* pentru (3.1), (3.2), (3.3b) în situația în care sînt îndeplinite condițiile (b_1), $(a_2)'$ și (a_3). În acest caz $\mathscr{A}_1$ se înlocuiește cu $\tilde{\mathscr{B}}_1 : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_1$ definit prin $D(\tilde{\mathscr{B}}_1) = D(\tilde{\mathscr{B}}_1)$

$$\tilde{\mathscr{B}}_1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{C_1}, \ldots, \frac{1}{C_n}\right) \mathscr{B}_1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix},$$

$$\forall \begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B}_1).$$

Să observăm că $\overline{D(\mathscr{B}_1)}^{X_1} = L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times \overline{D(L_2)}^{\mathbf{R}^n}$. Vezi și demonstrația Propoziției 3.1 de mai sus. În mod normal o soluție pentru problema (3.1), (3.2), (3.3b) trebuie legată de u_0, v_0, f, g și e. Așadar pentru a obține o soluție slabă pentru problema noastră putem lua în acest caz : u_0, $v_0 \in L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$; y_0 arbitrar în $\overline{D(L_2)}^{\mathbf{R}^n}$; f, $g \in L^1(0, T; L^2(0,1; \mathbf{R}^n))$ și $e \in L^1(0, T; \mathbf{R}^n)$.

Observația 3.17. Toate rezultatele de existență și regularitate expuse pînă acum au loc și atunci cînd neliniaritățile A, B și L, respectiv L_2 sînt aplicații ω-monotone, $\omega > 0$ (vezi Observația 2.1 din Cap. I). Pentru a justifica această afirmație avem de observat doar că operatorii $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ respectiv $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{B}_1$ devin ω-monotoni pe X, respectiv X_1. În particular, una sau mai multe dintre neliniaritățile amintite pot fi presupuse lipschitziene.

3.2. Comportarea asimptotică a soluțiilor

În continuare vom analiza modul cum se traduc rezultatele abstracte de comportare asimptotică stabilite în Cap. II la problemele mixte studiate în cele de mai sus. De asemenea, vom pune în evidență anumite

particularităţi specifice acestor probleme care nu reies din rezultatele generale.

Mai întîi intenţionăm să demonstrăm un rezultat de comportare asimptotică pentru soluţiile problemei (3.1), (3.2), (3.3a) în ipotezele (a_1), $(a_2)'$ şi (a_3). În aceste condiţii existenţa soluţiilor este asigurată de Teorema 3.2. Astfel să presupunem că :

(a_4) $$f,g \in L^1(\mathbf{R}_+ ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)).$$

Dacă în plus u_0, $v_0 \in L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$, atunci, conform Teoremei 3.2 şi Observaţiei 3.10, problema (3.1), (3.2), (3.3a) (considerată pentru $t \geqslant 0$) admite o soluţie slabă unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, cu $u,v \in C([0, +\infty[; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$. Vom mai utiliza următoarele ipoteze :

(a_5) Există o soluţie $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n) \times H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ pentru problema la limită

$$\begin{cases} q'(x) \in A(p(x)), & \text{a.p.t. } x \in]0,1[, \\ p'(x) \in B(q(x)), & \text{a.p.t. } x \in]0,1[, \end{cases} \tag{3.114}$$

$$(p(0), -p(1)) \in L(q(0), q(1)). \tag{3.115}$$

Soluţia $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ este evident o *soluţie staţionară* a problemei (3.1), (3.2), (3.3a) cu $f \equiv 0$, $g \equiv 0$.

În sfîrşit mai presupunem că :

(a_6) Cel puţin una dintre următoarele trei condiţii este îndeplinită

(i) Aplicaţiile A, B sînt ambele strict monotone.

(ii) A este univocă şi strict monotonă iar L satisface proprietatea

(P) $(L(y_1, y_2) \cap L(y_3, y_4) \neq \emptyset$ şi $y_1 - y_2 = y_2 - y_4) \Rightarrow (y_1 = y_3$ şi $y_2 = y_4)$

(iii) B este univocă şi strict monotonă şi L^{-1} satisface proprietatea (P).

Observaţia 3.18. Se va vedea în aplicaţiile pe care le vom prezenta că proprietatea (P) este naturală.

Referitor la condiţia (a_5) se poate afirma că ea este indispensabilă pentru a deduce comportarea asimptotică a soluţiilor. Într-adevăr, condiţia (a_5) este echivalentă cu condiţia :

$$\text{Ecuaţia } \mathscr{B}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \text{ are soluţie.} \tag{3.116}$$

Avînd în vedere faptul că problema (3.1), (3.2), (3.3a) se exprimă sub forma problemei Cauchy (3.77), (3.78) şi ţinînd seama de Teorema 1.1 şi Observaţia 1.2 din Cap. II rezultă că (3.116) sau (a_5) echivalează cu faptul că orbita $\left\{ \begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \end{pmatrix} ; t \geqslant 0 \right\}$ este mărginită în $X = L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n) \times$ $\times L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n)$ pentru orice soluţie $\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \end{pmatrix}$, $t \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.5. *Presupunem că ipotezele* (a_1), $(a_2)'$, (a_3), (a_4), (a_5) *și* (a_6) *sînt îndeplinite și* $u_0, v_0 \in L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$. *Atunci, problema la limită* (3.114), (3.115) *admite o soluție unică* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H^1(0,1;\mathbf{R}^n) \times H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$ *astfel încît*

(3.117) $u(t,.) \to p$, $v(t,.) \to q$, pentru $t \to \infty$, tare în $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$,

unde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *este soluția slabă pe* $[0, \infty[$ *a problemei* (3.1), (3.2) (3.3a) *corespunzătoare datelor* $(u_0, v_0; f, g)$.

Dacă, în plus,

(3.118) $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H^1(0,1;\mathbf{R}^n) \times H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$; $(u_0(0), u_0(1)) \in L(v_0(0), v_0(1))$,

(3.119) f *și* $g \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+; L^2(0,1;\mathbf{R}^n))$,

atunci (3.117) *are loc în topologia slabă a spațiului* $H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$, *deci în particular tare în* $C([0,1];\mathbf{R}^n)$.

Demonstrație. Fără a restrînge generalitatea vom presupune că $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$. Avînd în vedere faptul că problema (3.1), (3.2), (3.3a) se exprimă sub forma problemei Cauchy (3.77), (3.78), considerate pentru $0 < t < \infty$, pentru a demonstra (3.117) se poate de asemenea presupune, în virtutea Teoremei de comparație 1.3 din Cap. II, că $f \equiv 0$ și $g \equiv 0$. Pentru a putea aplica tehnica mulțimilor ω-limită prezentată în § 2, Secțiunea 2.3 din Cap. II vom demonstra mai întîi următorul rezultat.

Propoziția 3.2. *Presupunem îndeplinite condițiile* (a_1) *și* $(a_2)'$. *Atunci,* $\forall \lambda > 0$ *operatorul* $(I + \lambda\mathscr{B})^{-1}$ *aplică mulțimi mărginite din* $X = L^2(0,1;\mathbf{R}^n) \times L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$ *în mulțimi mărginite din* $H^1(0,1;\mathbf{R}^n) \times H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$ *(deci, în particular, relativ compacte în* $C([0,1];\mathbf{R}^n) \times C([0,1];\mathbf{R}^n)$). *Amintim că* $\mathscr{B}$ *este operatorul definit prin* (3.46), (3.47).

Demonstrația Propoziției 3.2. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} h_j \\ k_j \end{pmatrix} \in X;\ j \in J \right\}$ o mulțime mărginită în X și notăm prin

(3.120) $\begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix} = (I + \lambda\mathscr{B})^{-1} \begin{pmatrix} h_j \\ k_j \end{pmatrix}$, $j \in J$ și $\lambda > 0$ fixat.

Deoarece $(I + \lambda\mathscr{B}^{-1})$ este neexpansiv pe X urmează imediat că mulțimea

(3.121) $\left\{ \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix};\ j \in J \right\}$ este mărginită în X.

Pe de altă parte, relațiile (3.120) se mai scriu sub forma următoarelor probleme la limită:

(3.122) $\begin{cases} q_j'(x) \in A(p_j(x)) + (1/\lambda)\,[p_j(x) - h_j(x)], \text{ a.p.t. } x \in]0,1[. \\ p_j'(x) \in B(q_j(x)) + (1/\lambda)\,[q_j(x) - k_j(x)], \text{ a.p.t. } x \in]0,1[, \end{cases}$

(3.123) $(p_j(0), -p_j(1)) \in L(q_j(0), q_j(1))$,

Scanned with OKEN Scanner

unde j parcurge mulțimea de indici J. În continuare urmăm linia demonstrației Lemei 3.2. Astfel, se înmulțesc pe rînd ecuațiile sistemului (3.122) cu $p_j - p^* - \xi_j$ și respectiv cu $q_j - q^* - \eta_j$, unde p^*, q^* sînt funcțiile definite prin (3.21) iar ξ_j, η_j se definesc ca în demonstrația Lemei 3.2, adică

$$\xi_j(x) = \begin{cases} q_j'(x)/\| q_j'(x) \|_{\mathbf{R}^n}, & \text{dacă } q_j(x) \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{dacă } q_j(x) = 0 \end{cases}$$

și în mod analog se definesc η_j, $\forall j \in J$. Se raționează apoi exact ca în demonstrația Lemei 3.2, ținîndu-se cont și de (3.121), și se obține în final că mulțimile $\{p_j\,;\, j \in J\}$ și $\{q_j\,;\, j \in J\}$ sînt mărginite în $H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$, adică tocmai ceea ce doream să demonstrăm. Un fapt esențial pe care l-am utilizat este acela că $D(A) = D(B) = \mathbf{R}^n$. Cu aceasta Propoziția 3.2 este complet demonstrată. În particular $(I + \lambda\mathscr{B})^{-1}$ este un operator compact de la X la X.

Demonstrația Teoremei 3.5. (Continuare). Conform Propoziției 2.5 din Cap. II rezultă că orbita $\gamma\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \bigcup_{t \geqslant 0} \left\{ S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\}$ este relativ compactă în X, unde $\{S(t)\,;\, t \geqslant 0\}$ este semigrupul generat de $-\mathscr{B}$. Notăm ca de obicei cu F mulțimea punctelor fixe ale semigrupului $\{S(t)\,;\, t \geqslant 0\}$ adică (vezi Observația 1.1 din Cap. II) $F = \mathscr{B}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Conform ipotezei (a_5), F este o mulțime nevidă. Să arătăm că F are numai un singur element. Pentru aceasta fie $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \in F$ sau $\mathscr{B}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathscr{B}\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} = 0$. Prin urmare avem

$$\left(\mathscr{B}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \mathscr{B}\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p - \bar{p} \\ q - \bar{q} \end{pmatrix} \right)_X = 0$$

sau, ținînd seama de definiția operatorului $\mathscr{B}$,

$$(3.124) \qquad (p(0) - \bar{p}(0),\ q(0) - \bar{q}(0))_{\mathbf{R}^n} - (p(1) - \bar{p}(1),\ q(1) - \bar{q}(1))_{\mathbf{R}^n} + \int_0^1 (A(p(x)) - A(\bar{p}(x)),\ p(x) - \bar{p}(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx + \int_0^1 (B(q(x)) - B(\bar{q}(x)),\ q(x) - \bar{q}(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx = 0.$$

Pentru simplitatea scrierii considerăm că atît A cît și B sînt univoce.

Să observăm că p, $\bar{p}$, q, $\bar{q} \in H^1(0,1\,;\mathbf{R}^n)$ și $(p(0), -p(1)) \in L(q(0), q(1))$; $(\bar{p}(0), -\bar{p}(1)) \in L(\bar{q}(0), \bar{q}(l))$. Atunci, datorită monotoniei aplicațiilor L, A și B relația (3.124) conduce la următoarele :

$$(3.125) \qquad (A(p(x)) - A(\bar{p}(x)),\ p(x) - \bar{p}(x))_{\mathbf{R}^n} = 0, \text{ a.p.t. } x \in\ ]0,1[,$$

$$(3.126) \qquad (B(q(x)) - B(q(x)),\ q(x) - \bar{q}(x))_{\mathbf{R}^n} = 0, \text{ a.p.t. } x \in\ ]0,1[.$$

Presupunem mai întîi că (a_6) (i) este îndeplinită. Atunci din (3.125) și (3.126) rezultă $p = \bar{p}$ și $q = \bar{q}$ pe $[0,1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem acum că (a_6) (ii) este satisfăcută. Considerînd din nou $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \in F$ rezultă din (3.125) că $p = \bar{p}$. Atunci, avem

$$-\bar{q}'(x) + A(p(x)) = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[\tag{3.127}$$

împreună cu

$$-q'(x) + A(p(x)) = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[. \tag{3.128}$$

Ecuațiile (3.127) și (3.128) arată că

$$q(x) - \bar{q}(x) = \text{Const.}, \forall x \in [0,1]. \tag{3.129}$$

Pe de altă parte mai avem

$$(p(0), -p(1)) \in L(q(0), q(1)) \cap L(\bar{q}(0), \bar{q}(1)). \tag{3.130}$$

Acum intră în joc proprietatea (P) care, în virtutea relațiilor (3.129) și (3.130), implică $q = \bar{q}$. Așadar, presupunînd că (a_6), (ii) este îndeplinită rezultă din nou că F are un singur element. Cazul (a_6) (iii) este perfect simetric cu (a_6), (ii). Deci, în toate cazurile F are un singur element, $F = \left\{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right\}$.

Mai notăm

$$\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}; \exists\, t_m \to \infty \text{ astfel încît } S(t_m)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \text{tare în } X\right\}.$$

Pentru a arăta (3.117) putem presupune, în virtutea Propoziției 2.4 din Cap. II, că $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$ sau, echivalent, $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ verifică condițiile (3.118). Atunci, conform Teoremei 2.8, (iv) din Cap. II, avem $\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \subset D(\mathscr{B})$. Deci, luînd o pereche $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ urmează că $S(t)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ satisface ecuația

$$\frac{d^+}{dt} S(t)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \mathscr{B}\left(S(t)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right) = 0, \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}. \tag{3.131}$$

Pe de altă parte, Teorema 2.7 din Cap. II arată că

$$\left\| S(t)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\|_x = \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\|_x = \text{Const.}, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3.132}$$

Înmulțind scalar în X ecuația (3.131) cu $S(t)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ și folosind (3.132) obținem

$$\left(\mathscr{B}\left(S(t)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right), S(t)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)_x = 0, \qquad \forall\, t \in \mathbf{R},$$

sau, notînd $\begin{pmatrix}\tilde{u}(t,.)\\ \tilde{v}(t,.)\end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, avem

$$(3.133)\quad \left(\mathscr{B}\begin{pmatrix}\tilde{u}(t,.)\\ \tilde{v}(t,.)\end{pmatrix} - \mathscr{B}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tilde{u}(t,.)\\ \tilde{v}(t,.)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\right)_x = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Raționînd ca mai sus se deduce din (3.133), folosind monotonia aplicațiilor L, A, B că, pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$.

$$(3.134)\quad (A(\tilde{u}(t,x)) - A(p(x)), \tilde{u}(t,x) - p(x))_{\mathbf{R}^n} = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[,$$

$$(3.135)\quad (B(\tilde{v}(t,x)) - B(q(x)), \tilde{v}(t,x) - q(x))_{\mathbf{R}^n} = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[.$$

Dacă admitem că (a_6), (i) este îndeplinită, atunci ultimele două egalități implică $\tilde{u}(t,.) = p$ și $\tilde{v}(t,.) = q$, pentru toți $t \in \mathbf{R}$. Deci, în particular, $\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$.

Să admitem acum că (a_6), (ii) este îndeplinită. Atunci $\tilde{u}(t,.) = p$, $t \in \mathbf{R}$ și din (3.131) rezultă că, pentru orice $t \in \mathbf{R}$,

$$-(\partial \tilde{v}/\partial x)(t,x) + A(p(x)) = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[.$$

În particular

$$-k'(x) + A(p(x)) = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[.$$

Cum, pe de altă parte, $-q'(x) + A(p(x)) = 0$, a.p.t. $x \in]0,1[$ este limpede că

$$q(x) - k(x) = \text{Const.}, \forall x \in [0,1].$$

Astfel, folosind din nou proprietatea (P) a aplicației L, urmează că $q = k$. Deci și în cazul (a_6), (ii) avem $\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$. Deoarece, cazul ($a_6$), (iii) este perfect simetric cu (a_6), (ii) putem afirma că în toate cele trei cazuri $\omega\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}\right\}$, condiție care echivalează cu (3.117). Pentru a încheia demonstrația teoremei să presupunem acum că u_0, v_0 verifică condițiile (3.118) sau, echivalent, $\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$ și că f, g verifică (3.119). În acest caz $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ este soluție tare a problemei (3.1), (3.2), (3.3a) (cu $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$) adică, pentru fiecare $t \geqslant 0$, u și v satisfac

$$(3.136)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial x} + A(u(t,x)) = f(t,x) - \dfrac{\partial^+ u(t,x)}{\partial t}, \\ -\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} + B(v(t,x)) = g(t,x) - \dfrac{\partial^+ v(t,x)}{\partial t}, \end{cases}$$

a.p.t. $x \in]0,1[$

Scanned with OKEN Scanner

împreună cu (3.3a) și desigur u și v satisfac condițiile inițiale (3.2). Să mai remarcăm că (vezi Teorema 2.1 din Cap. I)

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(\left\|\frac{\partial^+ u(t,.)}{\partial t}\right\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}+\left\|\frac{\partial^+ v(t,.)}{\partial t}\right\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}\right)<+\infty \tag{3.137}$$

și, conform cu (3.119),

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(\|f(t,.)\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}+\|g(t,.)\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}\right)<+\infty. \tag{3.138}$$

De asemenea, întrucît $F\neq\emptyset$, rezultă în baza Teoremei 1.1 și Observația 1.2 din Cap. II că

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(\|u(t,.)\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}+\|v(t,.)\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}\right)<+\infty. \tag{3.139}$$

Repetînd procedeul pe care l-am utilizat de mai multe ori anterior (ultima dată în demonstrația Propoziției 3.2) ajungem la concluzia că mulțimile $\{u(t,.);\ t\geqslant 0\}$ și $\{v(t,.);\ t\geqslant 0\}$ sînt mărginite în $H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$. Astfel, să înmulțim pe rînd ecuațiile sistemului (3.136) scalar în $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$ cu $u(t,.)-p^*-\xi(t,.)$ și respectiv cu $v(t,.)-q^*-\eta(t,.)$, unde $\begin{pmatrix}p^*\\ q^*\end{pmatrix}\in D(\mathscr{B})$ (de exemplu, $p^*=u_0$ și $q^*=v_0$), $\xi(t,.)$, $t\geqslant 0$ se definește prin

$$\xi(t,x)=\begin{cases}\left(1\Big/\left\|\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}\right\|_{\mathbf{R}^n}\right)\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}, & \text{dacă } x\in E(t)=\left\{y\in[0,1];\ \dfrac{\partial v(t,y)}{\partial y}\neq 0\right\},\\ 0, & \text{dacă } x\in[0,1]\setminus E(t)\end{cases}$$

iar $\eta(t,.)$, $t\geqslant 0$, se definește analog înlocuind pe v cu u. În acest mod se obține

$$\int_0^1\left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial x},\ \xi(t,x)\right)_{\mathbf{R}^n}dx=\int_0^1\left(u(t,x)-p^*(x),\ \frac{\partial}{\partial x}(v(t,x)-q^*(x))\right)_{\mathbf{R}^n}dx+$$

$$+\int_0^1\left(\frac{dq^*(x)}{dx},\ u(t,x)-p^*(x)\right)_{\mathbf{R}^n}dx+\int_0^1\left(f(t,x)-\frac{\partial^+ u(t,x)}{\partial t},\ u(t,x)-\right.$$

$$\left.-p^*(x)-\xi(t,x)\right)_{\mathbf{R}^n}dx-\int_0^1\left(A(u(t,x)),\ u(t,x)-p^*(x)-\xi(t,x)\right)_{\mathbf{R}^n}dx,\forall t\geqslant 0$$

împreună cu o egalitate asemănătoare obținută din a doua ecuație a sistemului (3.136). Continuînd procedeul amintit și ținînd cont de (3.137), (3.138), (3.139) și de faptul că A și B sînt mărginite pe mulțimi mărginite din $\mathbf{R}^n$ se obține că

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(\left\|\frac{\partial u(t,.)}{\partial x}\right\|_{L^1(0,1;\mathbf{R}^n)}+\left\|\frac{\partial v(t,.)}{\partial x}\right\|_{L^1(0,1;\mathbf{R}^n)}\right)<+\infty.$$

și apoi, după cîteva raționamente cunoscute, se obține, mai mult, că

$$\sup_{t\geqslant 0}\left(\left\|\frac{\partial u(t,.)}{\partial x}\right\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}+\left\|\frac{\partial v(t,.)}{\partial x}\right\|_{L^2(0,1;\mathbf{R}^n)}\right)<+\infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această ultimă estimare împreună cu (3.139) arată că într-adevăr mulțimile $\{u(t,.)\,;\,t \geqslant 0\}$ și $\{v(t,.)\,;\,t \geqslant 0\}$ sînt mărginite în spațiul $H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$. Deoarece știm deja că (3.117) este adevărată urmează atunci că $u(t,.) \to p$, $v(t,.) \to q$, pentru $t \to \infty$, slab în $H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$. ■

Pentru a stabili un alt rezultat de comportare asimptotică vom introduce două ipoteze noi, comparabile cu (a_5) și (a_6)

$(a_5)'$ $\quad 0 \in A(0),\ 0 \in B(0)$ și $(0,0) \in L(0,0)$.

$(a_6)'$ Cel puțin una dintre următoarele trei condiții este îndeplinită

(j) $\begin{cases} (\exists\,[y,z] \in A \text{ astfel încît } (y,z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0) \text{ și} \\ (\exists\,[y,z] \in B \text{ astfel încît } (y,z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0). \end{cases}$

(jj) $\begin{cases} L^{-1}(0,0) = \{(0,0)\},\ A(0) = \{0\} \text{ și} \\ (\exists [y,z] \in A \text{ astfel încît } (y,z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0). \end{cases}$

(jjj) $\begin{cases} L(0,0) = \{(0,0)\},\ B(0) = \{0\} \text{ și} \\ (\exists [y,z] \in B \text{ astfel încît } (y,z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0). \end{cases}$

Teorema 3.6. *Presupunem că ipotezele* (a_1), $(a_2)'$, (a_3), (a_4), $(a_5)'$, *și* $(a_6)'$ *sînt îndeplinite și fie* $u_0, v_0 \in L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$. *Atunci, soluția banală este unica soluție a problemei staționare* (3.114), (3.115) *și*

(3.140) $\quad u(t,.) \to 0,\ v(t,.) \to 0,$ *cînd* $t \to \infty$, *tare în* $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$,

unde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *este soluția slabă pe* $[0, +\infty[$ *a problemei* (3.1), (3.2), (3.3a), *corespunzătoare datelor* $(u_0, v_0\,;\,f, g)$. *Dacă în plus* (3.118) *și* (3.119) *au loc atunci* (3.140) *are loc în topologia slabă a spațiului* $H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$.

Demonstrație. Faptele referitoare la compactitatea orbitei soluției pe care le-am pus în evidență în demonstrația Teoremei 3.5 rămîn valabile și aici. Vom păstra și aici toate notațiile făcute în demonstrația Teoremei 3.5. Din $(a_5)'$ rezultă că $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$. Să arătăm că $F = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Pentru aceasta, fie $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n) \times H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$ soluție pentru problema (3.114), (3.115). Înmulțim scalar în $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$ ecuațiile sistemului (3.114) cu p și respectiv q. Adunînd rezultatele și folosind monotonia aplicațiilor A, B, L precum și condiția $(a_5)'$ se obține

(3.141) $\quad (A(p(x)), p(x))_{\mathbf{R}^n} = 0$ și $(B(q(x)), q(x))_{\mathbf{R}^n} = 0$, a.p.t. $x \in\,]0,1[$.

Pentru simplitate presupunem din nou că A, B sînt aplicații univoce. Dacă $(a_6)'$, (j) este îndeplinită, atunci (3.141) implică evident $p = 0$ și $q = 0$ pe $[0,1]$. Dacă admitem că $(a_6)'$, (jj) este îndeplinită, atunci din (3.141) avem $p = 0$ și cum p, q verifică (3.114), (3.115) deducem în virtutea condiției amintite (jj) că, de asemenea, $q = 0$. Cazul $(a_6)'$, (jjj) este simetric cu $(a_6)'$, (jj). Astfel, am arătat că $F = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Presupunem fără a se restrînge generalitatea că $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{F})$ și

Scanned with OKEN Scanner

fie $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \omega \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Procedînd ca în demonstrația Teoremei 3.5 se obține că, pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$,

$$(A(\tilde{u}(t,x)), \tilde{u}(t,x))_{\mathbf{R}^n} = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[\tag{3.142}$$

$$(B(\tilde{v}(t,x)), \tilde{v}(t,x))_{\mathbf{R}^n} = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[. \tag{3.143}$$

Dacă $(a_6)'$, (j) este îndeplinită, atunci (3.142) și (3.143) implică faptul că, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, $\tilde{u}(t,.) = 0$ și $\tilde{v}(t,.) = 0$. Prin urmare, în particular $h = 0$ și $k = 0$.

Dacă $(a_6)'$, (jj) are loc, atunci $\forall t \in \mathbf{R}$, $\tilde{u}(t,.) = 0$ și ținînd cont și de (3.131), găsim că, pentru orice $t \in \mathbf{R}$ $\tilde{v}(t,x) = c(t)$ (independentă de x), $0 \leqslant x \leqslant 1$. În particular $k(x) = c(0)$, $\forall x \in [0,1]$. Deoarece $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$ avem, în plus, $(0,0) \in L(c(0), c(0))$. Deoarece $L^{-1}(0,0) = \{(0,0)\}$ putem conchide că $h = 0$ și $k = 0$. Cazul $(a_6)'$, (jjj) este simetric cu $(a_6)'$, (jj). Deci, în toate cele trei cazuri avem $\omega \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Astfel, demonstrația este terminată. ▩

Teorema 3.7. *Presupunem că sînt îndeplinite ipotezele* (a_1), (a_2), (a_3), (a_4) *și, în plus,* $B = \partial\psi(\psi : D(\psi) = \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *convexă și continuă*$)$, $A^{-1}(0) = B^{-1}(0) = \{0\}$ *și* $(0,0) \in L(0,0)$. *Fie* $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \overline{D(\mathscr{A})}^X$, *unde* $X = L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1; \mathbf{R}^n)$ *iar* $\mathscr{A}$ *este operatorul definit prin* (3.6), (3.7). *Atunci*

$$u(t,.) \to 0, \text{ cînd } t \to \infty, \text{ tare în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n), \tag{3.144}$$

$$v(t,.) \to 0, \text{ cînd } t \to \infty, \text{ slab în } L^2(0,1; \mathbf{R}^n), \tag{3.145}$$

unde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *este soluția slabă pe* $[0, +\infty[$ *a problemei* (3.1), (3.2) (3.3a) *corespunzătoare datelor* $(u_0, v_0; f, g)$ *(vezi Observația* 3.10*). Dacă, în plus,* $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$ *și* $f, g \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+; L^2(0,1; \mathbf{R}^n))$, *atunci*

$$u(t,.) \to 0, \text{ cînd } t \to \infty, \text{ slab în } H^1(0,1; \mathbf{R}^n), \tag{3.146}$$

deci, în particular, tare în $C([0,1]; \mathbf{R}^n)$.

Demonstrație. Pentru a dovedi teorema se poate presupune din nou, fără a se restrînge generalitatea, că $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$. De asemenea, pentru a dovedi (3.144) și (3.145) se presupune pentru moment că $f \equiv 0$ și $g \equiv 0$. Evident avem $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Afirmăm că $\mathscr{A}$ este demipozitiv în raport cu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vezi Definiția 1.1 din Cap. II). Pentru a

dovedi aceasta fie şirurile $\left\{\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix}\right\}$ şi $\left\{\begin{pmatrix} h_m \\ k_m \end{pmatrix}\right\}$ astfel încît

(3.147) $\forall m \in \mathbf{N}, \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} \in \mathscr{A} \begin{pmatrix} h_m \\ k_m \end{pmatrix}$ şi $\left\{\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix}\right\}$ este mărginit în X,

(3.148) $h_m \to h$, $k_m \to k$ slab în $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$,

(3.149) $$\lim_{m\to\infty} \left(\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_m \\ k_m \end{pmatrix} \right)_X = 0.$$

Prin intermediul formulei de integrare prin părţi (F) din Cap. 0, § 5, (3.149) devine

(3.150) $$\lim_{m\to\infty} \left\{ [(h_m(0),\ k_m(0))_{\mathbf{R}^n} - (h_m(1),\ k_m(1))_{\mathbf{R}^n}] + \mu_m(h_m) + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 (\delta_m(x),\ k_m(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx \right\} = 0,$$

unde $\mu_m \in \tilde{A}(h_m)$ iar $\delta_m \in \bar{B}(k_m)$. Menţionăm că am păstrat toate notaţiile făcute la începutul paragrafului. Fără a restrînge generalitatea se poate presupune că $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, deci $\varphi \geqslant 0$ şi $\psi \geqslant 0$. Deoarece aplicaţiile A, B, L sînt monotone, (3.150) conduce la $\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \varphi(h_m(x))\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \psi(k_m(x))\, dx = 0$ sau

(3.151) $$\lim_{m\to\infty} \Phi(h_m) = \lim_{m\to\infty} \Psi(k_m) = 0,$$

unde $\Phi : L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n) \to]-\infty, +\infty]$ se defineşte prin

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \varphi(\xi)(x))\, dx, & \text{dacă } \varphi \circ \xi \in L^1(0,1) \\ +\infty, & \text{în rest} \end{cases}$$

iar Ψ se defineşte analog. Se ştie că (vezi Propoziţia 1.5 din Cap. I) funcţiile Φ şi Ψ sînt convexe şi semicontinue inferior, deci acestea sînt slab semicontinue inferior (semicontinue inferior în raport cu topologia slabă a lui $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$). Astfel, (3.151) împreună cu (3.148) implică

(3.152) $\varphi(h(x)) = \psi(k(x)) = 0$, a.p.t. $x \in\,]0,1\,[$.

Dar ipoteza $A^{-1}(0) = B^{-1}(0) = \{0\}$ spune tocmai că $0 \in \mathbf{R}^n$ este unicul punct de minim atît pentru φ cît şi pentru ψ. Deci, din (3.152) se obţine: $h(x) = k(x) = 0$, a.p.t. $x \in\,]0,1[$. Prin urmare $\mathscr{A}$ este într-adevăr demi-

pozitiv în raport cu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. În particular

$$\mathscr{A}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}. \tag{3.153}$$

Atunci conform Teoremei 1.3 și Teoremei 1.5 din Cap. II se obțini (3.144) și (3.145), deocamdată ambele în topologia slabă a spațiului $L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)$. Să dovedim în continuare (3.146). Fie deci $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$ și $f, g \in$ $\in W^{1,1}(\mathbf{R}_+\,;L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n))$ și $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ soluția corespunzătoare pe $[0, +\infty[$ a problemei (3.1), (3.2), (3.3a). Considerăm pe $[0, +\infty[$ problemele aproximative de tipul (3.55), (3.56). Atunci, din (3.58), (3.59) și faptul că $f, g \in$ $\in W^{1,1}(\mathbf{R}_+\,;L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n))$ avem :

$$\sup_{\substack{t\geqslant 0\\ \lambda>0}} \left(\left\| \frac{\partial^+ u_\lambda(t,.)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)} + \left\| \frac{\partial^+ v_\lambda(t,.)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)} \right) < +\infty \tag{3.154}$$

și

$$\sup_{t\geqslant 0} \left(\| f(t,.) \|_{L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)} + \| g(t,.) \|_{L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)} \right) < +\infty. \tag{3.155}$$

Pe de altă parte, conform ipotezelor, avem : $\mathscr{A}^\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall \lambda > 0$. Am folosit faptul că $A_\lambda(0) = B_\lambda(0) = 0$. Astfel, înmulțindu-se (3.55) scalar în X cu $\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ v_\lambda(t) \end{pmatrix}$ se obține

$$\frac{1}{2}\frac{d^+}{dt}\left(\left\| \begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ v_\lambda(t) \end{pmatrix} \right\|_X^2 \right) \leqslant \left(\begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ v_\lambda(t) \end{pmatrix} \right)_X, \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall \lambda > 0$$

de unde, folosindu-se (3.57), se deduce că

$$\frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ v_\lambda(t) \end{pmatrix} \right\|_X^2 \leqslant \text{Const.} + \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} f(s,.) \\ g(s,.) \end{pmatrix} \right\|_X \cdot \left\| \begin{pmatrix} u_\lambda(s) \\ v_\lambda(s) \end{pmatrix} \right\|_X ds \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall \lambda > 0.$$

În consecință (vezi Lema 2.1 din Cap. I)

$$\sup_{\substack{t\geqslant 0\\ \lambda>0}} \left(\| u_\lambda(t,.) \|_{L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)} + \| v_\lambda(t,.) \|_{L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n)} \right) < +\infty. \tag{3.156}$$

O dată aceste lucruri dovedite, se poate utiliza procedeul pe care l-am folosit de mai multe ori pînă acum (vezi, de exemplu, demonstrația

Teoremei 3.1). Astfel, se obţin toate estimările din demonstraţia Teoremei 3.1 cu deosebirea că acum T se înlocuieşte cu $+\infty$. În final se ajunge la

$$\sup_{\substack{t\geq 0\\ \lambda>0}} \left\| \frac{\partial u_\lambda(t,.)}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} < +\infty. \tag{3.157}$$

Deoarece pentru orice $T > 0$ are loc (3.61), atunci (3.157) implică

$$\sup_{t\geq 0} \left\| \frac{\partial u(t,.)}{\partial x} \right\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} < +\infty. \tag{3.158}$$

Din (3.153) rezultă că mulţimea $\{u(t,.)\,;\, t\geqslant 0\}$ este mărginită în $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$ (vezi Teorema 1.1 şi Observaţia 1.2 din Cap. II). Acest fapt împreună cu (3.158) arată că mulţimea $\{u(t,.)\,;\, t\geqslant 0\}$ este mărginită în $H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$. Prin urmare (3.146) este îndeplinită deoarece am arătat deja că $u(t,.)$ converge la 0, pentru $t\to\infty$, slab în $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$. Pentru a arăta că în (3.144) convergenţa este chiar tare în $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$ să revenim la condiţiile : $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \ni \overline{D(\mathscr{A})}^X$ şi f, g satisfac (a_4).

Fie $\left\{\begin{pmatrix} u_0^m \\ v_0^m \end{pmatrix}\right\}$ un şir de elemente din $D(\mathscr{A})$ care converge în X la $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ şi $\left\{\begin{pmatrix} f_m \\ g_m \end{pmatrix}\right\}$ un şir din $W^{1,1}(\mathbf{R}_+\,;\,X)$ care converge în $L^1(\mathbf{R}_+\,;\,X)$ la $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Notăm cu $\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}$ soluţia (tare) a problemei (3.1), (3.2), (3.3a) pe $[0, +\infty[$ corespunzătoare datelor $(u_0^m, v_0^m\,;\, f_m\, g_m)$. Atunci, evident

$$\|u(t,.)\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} \leqslant \|u_m(t,.) - u(t,.)\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} + \|u_m(t,.)\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \begin{pmatrix} u_0^m \\ v_0^m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} f_m(s,.) \\ g_m(s,.) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(s,.) \\ g(s,.) \end{pmatrix} \right\|_X ds +$$

$$+ \|u_m(t,.)\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)}, \quad \forall m\in\mathbf{N}\,; \quad \forall t \geqslant 0.$$

Dar, din cele arătate mai sus, $u_m(t,.)$ converge pentru $t\to\infty$ la 0 slab în $H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$ deci, în particular, tare în $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$. Astfel, ţinînd seama de ultima inegalitate obţinem :

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t,.)\|_{L^2(0,1;\,\mathbf{R}^n)} \leqslant \left\| \begin{pmatrix} u_0^m \\ v_0^m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + \left\| \begin{pmatrix} f_m \\ g_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{L^1(\mathbf{R}_+;\,X)} \quad \forall m\in\mathbf{N}.$$

şi acest fapt implică evident (3.144). Astfel, Teorema 3.7 este complet demonstrată. ■

Observaţia 3.19. În condiţiile Teoremei 3.7 nu putem obţine o estimare de tipul (3.158) pentru $\partial v/\partial x$, deci nu avem asigurată precompacti-

Scanned with OKEN Scanner

tatea în ansamblu pentru orbita semigrupului generat de $-\mathscr{A}$. De aceea tehnica aplicată în Teoremele 3.5 și 3.6 nu a putut fi folosită și acum.

De aici încolo ne vom ocupa de cazul condițiilor la limită globale (3.3b). Să începem cu

Propoziția 3.3. *Presupunem îndeplinite ipotezele* (b_1) *și* $(a_2)'$. *Atunci,* $\forall \lambda > 0$ *operatorul* $(I + \lambda \mathscr{B}_1)^{-1}$ *aplică mulțimi mărginite din* $X_1 = L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times L^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$ *în mulțimi mărginite din* $H^1(0,1; \mathbf{R}^n) \times H^2(0,1; \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$, *unde* $\mathscr{B}_1$ *este operatorul definit prin* (3.89) *și* (3.90).

Demonstrație. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} h_j \\ k_j \\ y_j \end{pmatrix} \in X_1 ;\ j \in J \right\}$ o mulțime mărginită în X_1 și să notăm prin

$$\begin{pmatrix} p_j \\ q_j \\ z_j \end{pmatrix} = (I + \lambda \mathscr{B}_1)^{-1} \begin{pmatrix} h_j \\ k_j \\ y_j \end{pmatrix}, \quad j \in J \text{ și } \lambda > 0 \text{ fixat.} \tag{3.159}$$

Evident mulțimea

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \\ z_j \end{pmatrix} ;\ j \in J \right\} \text{ este mărginită în } X_1. \tag{3.160}$$

Ținînd seama de definiția operatorului $\mathscr{B}_1$, relațiile (3.159) devin:

$$\begin{cases} q_j'(x) \in A(p_j(x)) + (1/\lambda)\,[p_j(x) - h_j(x)], \text{ a.p.t. } x \in]0,1[\\ p_j'(x) \in B(q_j(x)) + (1/\lambda)\,[q_j(x) - k_j(x)], \text{ a.p.t. } x \in]0,1[\end{cases} \tag{3.161}$$

$$p_j(0) \in L_1(q_j(0)); \quad -p_j(1) \in L_2(q_j(1)) + (1/\lambda) q_j(1) - (1/\lambda) y_j, \tag{3.162}$$

unde j parcurge mulțimea de indici J. Se observă că problema (3.161), (3.162) diferă de problema (3.122), (3.123) doar prin faptul că aplicația din condițiile la limită (3.162) se schimbă cu fiecare j (din cauza termenului $-(1/\lambda) y_j$). Totuși, deoarece mulțimea $\{-(1/\lambda) y ;\ j \in J\}$ este mărginită în $\mathbf{R}^n$ putem proceda la fel ca în demonstrația Propoziției 3.2 (vezi, de asemenea, demonstrația Lemei 3.2). Schimbarea intervenită în condițiile la limită nu afectează prea mult demonstrația. Astfel, în locul inegalității

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (p_j - p^*,\ q_j - q^*)_{\mathbf{R}^n} \mathrm{d}x \leqslant 0, \quad \forall j \in J$$

pe care o utilizam în demonstrația Propoziției 3.2 vom avea acum

$$\sup_{j \in J} \left[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (p_j - p_*,\ q_j - q_*)_{\mathbf{R}^n} \mathrm{d}x \leqslant \text{Const.}, \right. \tag{3.163}$$

unde funcțiile $p_*,\ q_* : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ (analoagele funcțiilor $p^*,\ q^*$) se definesc prin:

$$p_*(x) = (1 - x) w_1 + x w_2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$q_*(x) = (1 - x) w_3 + x w_4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

cu $w_1 \in L_1(w_3)$ și $-w_2 \in L_2(w_4) + (1/\lambda)\, w_4$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, pentru orice $j \in J$ avem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_j - p_*, q_j - q_*)_{\mathbf{R}^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}(y_j, z_j - w_4)_{\mathbf{R}^n}$$

care implică (3.163) deoarece mulțimile $\{y_j;\ j \in J\}$ și $\{z_j;\ j \in J\}$ sînt mărginite în $\mathbf{R}^n$. Avînd la dispoziție (3.163) se poate continua demonstrația pe calea amintită întrucît nu mai intervin alte dificultăți din cauza schimbării apărute în condițiile la limită. Cu aceasta putem considera că Propoziția 3.3 este dovedită. ∎

Pentru a stabili un rezultat de comportare asimptotică pentru soluțiile problemei (3.1), (3.2), (3.3b) să precizăm cîteva ipoteze. Să admitem că sîntem în ipotezele (b_1), $(a_2)'$, (a_3). Mai întîi presupunem că

(b_4) $\qquad f,\ g \in L^1(\mathbf{R}_+;\ L^2(0,1;\ \mathbf{R}^n))$ și $e \in L^1(\mathbf{R}_+;\ \mathbf{R}^n)$.

Apoi, este clar că avem nevoie de existența unei soluții staționare, adică

(b_5) Există cel puțin o soluție $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H^1(0,1;\ \mathbf{R}^n) \times H^1(0,1;\ \mathbf{R}^n)$ pentru problema la limită

$$\begin{cases} q'(x) \in A(p(x)), \text{ a.p.t. } x \in\ ]0,1[, \\ p'(x) \in B(q(x)), \text{ a.p.t. } x \in\ ]0,1[, \end{cases} \tag{3.164}$$

$$p(0) \in L_1(q(0));\ -p(1) \in L_2(q(1)). \tag{3.165}$$

Observația 3.20. Soluțiile staționare ale problemelor (3.1), (3.2), (3.3a) (cu $f \equiv 0$ și $g \equiv 0$) și (3.1), (3.2), (3.3b) (cu $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ și $e \equiv 0$) verifică probleme la limită de același tip.

Mai presupunem :

(b_2) Cel puțin una dintre următoarele trei condiții este îndeplinită.

(i) Aplicațiile A, B sînt ambele strict monotone.

(ii) A este univocă și strict monotonă și, în plus : sau L_1 este injectivă sau L_2 este strict monotonă.

(iii) B este univocă și strict monotonă și cel puțin una dintre aplicațiile L_1^{-1}, L_2^{-1} este injectivă.

Observația 3.21. Aplicația $L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ definită prin $L\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix};\ \xi \in L_1(y),\ \eta \in L_2(z)\right\}$, $\forall \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D(L)$ satisface proprietea (P) din (a_6) dacă măcar una din aplicațiile L_1, L_2 este injectivă.

Teorema 3.8. *Presupunem că ipotezele* (b_1), $(a_2)'$, (a_3), (b_4), (b_5) *și* (b_6) *sînt îndeplinite. Atunci problema* (3.164), (3.165) *admite o soluție unică* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H^1(0,1;\ \mathbf{R}^n) + H^1(0,1;\ \mathbf{R}^n)$ *astfel încît*

$$u(t,.) \to p,\ v(t,.) \to q,\ \textit{pentru}\ t \to \infty,\ \textit{tare în}\ L^2(0,1;\ \mathbf{R}^n), \tag{3.166}$$

unde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *este o soluție slabă pe* $[0,\ \infty[$ *a problemei* (3.1), (3.2), (3.3b) *corespunzătoare unor date inițiale* $u_0,\ v_0 \in L^2(0,1;\ (\mathbf{R}^n)$ *și funcțiilor* f, g, e

(a se vedea Observația 3.16). Dacă în plus $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B}_1)$, *unde* $D(\mathscr{B}_1)$ *este dată prin* (3.89), $f,g \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+ ; L^2(0,1 ; \mathbf{R}^n))$ *și* $e \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n)$ *atunci soluția tare corespunzătoare* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *satisface*

(3.167) $u(t,.) \to p$, $v(t,.) \to q$, *pentru* $t \to \infty$, *slab în* $H^1(0,1 ; \mathbf{R}^n)$.

Demonstrație. Presupunem ca de obicei, fără a se restrînge generalitatea, că $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in]0,1[$ și $C = I_n$. Pentru a demonstra (3.166) presupunem, de asemenea fără a se restrînge generalitatea, că $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ și $u_0, v_0 \in H^1(0,1 ; (\mathbf{R}^n)$, astfel încît $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B}_1)$. Vom nota cu F_1 mulțimea punctelor fixe ale semigrupului $\{S_1(t) ; t \geqslant 0\}$ generat de operatorul $-\mathscr{B}_1$ adică $F_1 = \mathscr{B}_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. În virtutea ipotezei (b_5), $F_1 \neq \emptyset$. Vom arăta că în condițiile teoremei F_1 conține doar un element. Pentru aceasta să presupunem contrariul, adică F_1 conține cel puțin două elemente diferite, să zicem $\begin{pmatrix} p \\ q \\ q(1) \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{q}(1) \end{pmatrix}$. Prin urmare, în particular

$$\left(\mathscr{B}_1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ q(1) \end{pmatrix} - \mathscr{B}_1 \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{q}(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ q(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{q}(1) \end{pmatrix} \right)_{X_1} = 0$$

de unde se deduce foarte ușor că

(3.168) $(A(p(x)) - A(\bar{p}(x)), p(x) - \bar{p}(x))_{\mathbf{R}^n} = 0$, a.p.t. $x \in]0,1[$,

(3.169) $(B(q(x)) - B(\bar{q}(x)), q(x) - \bar{q}(x))_{\mathbf{R}^n} = 0$, a.p.t. $x \in]0,1[$.

Pentru simplitatea scrierii am considerat că aplicațiile A, B și L_2 sînt univoce, fapt ce nu restrînge generalitatea. Dacă (b_6), (i) este îndeplinită atunci rezultă imediat din (3.168) și (3.169) că $p = \bar{p}$ și $q = \bar{q}$. În cazul cînd (b_6), (ii) este îndeplinită, atunci, conform relației (3.168), avem $p = \bar{p}$. Deci avînd în vedere faptul că p,q și respectiv $\bar{p}$, $\bar{q}$ verifică problema (3.164), (3.165), rezultă că q și $\bar{q}$ diferă doar printr-o constantă aditivă și în plus : $p(0) \in L_1(q(0)) \cap L_1(\bar{q}(0))$; — $p(1) \in L_2(q(1)) \cap L_2(\bar{q}(1))$. Astfel, folosind din nou ipoteza (b_6), (ii) găsim că de asemenea $q = \bar{q}$. Admițînd acum că (b_6), (iii) este îndeplinită, rezultă din nou că $p = \bar{p}$ și $q = \bar{q}$. Deci în oricare din cele trei condiții ale ipotezei (b_6) avem $p = \bar{p}$ și $q = \bar{q}$ fapt ce contrazice presupunerea că F_1 ar conține două elemente diferite.

Scanned with OKEN Scanner

Deci F_1 are într-adevăr un singur element pe care-l vom nota de aici încolo cu $\begin{pmatrix} p \\ q \\ q(1) \end{pmatrix}$. În virtutea presupunerilor făcute,

$$\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \\ v(t,\ 1) \end{pmatrix} = S_1(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix},\ t \geqslant 0.$$

Ținînd cont de Propoziția 3.3 dovedită mai sus și de Propoziția 2.5 din Cap. II putem afirma că orbitele semigrupului $\{S_1(t)\,;\ t \geqslant 0\}$ sînt relativ compacte în X_1. Notăm, ca de obicei,

$$\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} h \\ k \\ y \end{pmatrix} \in X_1\,;\ \text{există } t_m \to \infty \text{ astfel încît } \begin{pmatrix} h \\ k \\ y \end{pmatrix} = \lim_{m\to\infty} S_1(t_m)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix}\right\}.$$

Deoarece $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix}$ a fost luat din $D(\mathscr{B}_1)$ avem $\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} \subset D(\mathscr{B}_1)$, conform Teoremei 2.8, (iv), Cap.II. Fie h, k două funcții fixate din $H^1(0,1\,;\ \mathbf{R}^n)$ astfel încît $\begin{pmatrix} h \\ k \\ k(1) \end{pmatrix} \in \omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix}$, deci, în particular, $k(1) \in D(L_2)$ și $h(0) \in L_1(k(0))$. Din Teorema 2.7, Cap. II, avem

$$\left\| S_1(t)\begin{pmatrix} h \\ k \\ k(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ q(1) \end{pmatrix} \right\|_{X_1} = \text{Const.},\quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3.170}$$

Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} S_1(t)\begin{pmatrix} h \\ k \\ k(1) \end{pmatrix} + \mathscr{B}_1\left(S_1(t)\begin{pmatrix} h \\ k \\ k(1) \end{pmatrix}\right) = 0,\quad \forall t \in \mathbf{R},$$

se deduce prin intermediul relației (3.170)

$$\left(\mathscr{B}_1\left(S_1(t)\begin{pmatrix} h \\ k \\ k(1) \end{pmatrix}\right),\ S_1(t)\begin{pmatrix} h \\ k \\ k(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \\ q(1) \end{pmatrix}\right)_{X_1} = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3.171}$$

Notăm

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(t,.) \\ \tilde{v}(t,.) \\ \tilde{v}(t,1) \end{pmatrix} = S_1(t)\begin{pmatrix} h \\ k \\ k(1) \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (3.171) se obține că pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$

(3.172) $(A(\tilde{u}(t, x)) - A(p(x)), \tilde{u}(t, x) - p(x))_{\mathbf{R}^n} = 0$, a.p.t. $x \in]0,1[$,

(3.173) $(B(\tilde{v}(t, x)) - B(q(x)), \tilde{v}(t, x) - q(x))_{\mathbf{R}^n} = 0$, a.p.t. $x \in]0,1[$,

(3.174) $(L_2(\tilde{v}(t, 1)) - L_2(q(1)), \tilde{v}(t, .) - q(1))_{\mathbf{R}^n} = 0$, a.p.t. $x \in]0,1[$.

Folosind relațiile (3.172) — (3.174) și ipoteza (b_6) se deduce că $h = p$ și $k = q$. Într-adevăr, dacă (b_6) (i) este îndeplinită acest fapt este evident din (3.172), (3.173). Presupunînd îndeplinită acum (b_6), (ii) avem : $\tilde{u}(t, .) = h = p$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Prin urmare, $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$(3.175) \qquad -\frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial x} + A(p(x)) = 0, \text{ a.p.t. } x \in]0,1[.$$

Amintim că $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ verifică problema la limită (3.164), (3.165). Astfel, din (3.175) și prima ecuație a sistemului (3.164), se deduce

$$(3.176) \qquad q(x) - k(x) = \text{Const.}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Dacă admitem că L_2 este strict monotonă, atunci din (3.174) rezultă $k(1) - q(1)$ deci, ținînd seama și de (3.176), avem $k = q$. Dacă admitem în schimb că L_1 este injectivă, atunci se obține din nou $k = q$ întrucît $p(0) \in L_1(q(0)) \cap L_1(k(0))$. Presupunînd în fine că (b_6), (iii) are loc se deduce din nou că $p = h$ și $q = k$. Deci $\omega \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ q(1) \end{pmatrix} \right\}$, adică afirmația (3.166) din enunțul teoremei este dovedită.

Pentru a dovedi a doua parte a teoremei se arată că mulțimile $\{u(t, .); t \geqslant 0\}$ și $\{v(t, .); t \geqslant 0\}$ sînt mărginite în $H^1(0,1; \mathbf{R}^n)$. Se folosește procedeul cunoscut. Lăsăm în seama cititorului această demonstrație. ■

Teorema 3.9. *Presupunem că ipotezele* (b_1), $(a_2)'$, (a_3), (b_4) *sînt îndeplinite și în plus :*

$(b_5)'$ $\qquad 0 \in A(0),\ 0 \in B(0),\ 0 \in L_1(0),\ 0 \in L_2(0)$;

$(b_6)'$ *Cel puțin una dintre următoarele trei condiții este îndeplinită*

(j) $\begin{cases} (\exists [y, z] \in A \text{ astfel încît } (y, z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0) \text{ și} \\ (\exists [y, z] \in B \text{ astfel încît } (y, z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0) \end{cases}$

(jj) $\begin{cases} (\exists [y, z] \in A \text{ astfel încît } (y, z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0) ; \\ \quad A(0) = \{0\} ; \\ \text{sau } L_1^{-1}(0) = \{0\} \text{ sau } (\exists [s, r] \in L_2 \text{ astfel ca } (s, r)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (s = 0) \end{cases}$

(jjj) $\begin{cases} (\exists [y, z] \in B \text{ astfel încît } (y, z)_{\mathbf{R}^n} = 0) \Rightarrow (y = 0) ; \\ \quad B(0) = \{0\} ; \\ \text{sau } L_1(0) = \{0\} \text{ sau } L_2(0) = \{0\}. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci perechea $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *este unica soluție a problemei* (3.164), (3.165) *și* $u(t,.)\to 0$, $v(t,.)\to 0$, *cînd* $t\to\infty$, *tare în* $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$, *unde* $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ *este o soluție slabă pe* $[0,+\infty[$ *a problemei* (3.1), (3.2), (3.3b). *Dacă în plus,* $u_0,\ v_0,\in H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$ *astfel încît* $\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\v_0(1)\end{pmatrix}\in D(\mathscr{B}_1)$ *și* $f,\ g\in$ $\in W^{1,1}(\mathbf{R}_+;L^2(0,1;\mathbf{R}^n))$, $e\in W^{1,1}(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}^n)$, *atunci soluția tare corespunzătoare* $\begin{pmatrix}u(t,.)\\v(t,.)\end{pmatrix}$, $t\geqslant 0$ *converge la* $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *în topologia slabă a spațiului* $H^1(0,1;\mathbf{R}^n)\times$ $\times H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$.

Demonstrație. Faptele referitoare la precompactitatea orbitelor soluțiilor demonstrate în teorema precedentă rămîn evident valabile și aici. Restul demonstrației urmează de asemenea o cale asemănătoare cu cea din teorema precedentă. Vezi de asemenea demonstrația Teoremei 3.6. O altă cale este de a arăta că operatorul $\mathscr{B}_1$ în condițiile de față este demipozitiv. ■

Observația 3.22. În Teoremele 3.5, 3.6, 3.8 și 3.9 condițiile impuse asigură precompactitatea orbitelor soluțiilor. Condițiile (a_6), $(a_6)'$ și (b_6), $(b_6)'$ au fost impuse pentru a asigura chiar convergența soluțiilor pentru $t\to\infty$. Se poate remarca ușor, analizînd demonstrațiile, că se pot pune condiții mai puține pentru a asigura doar convergența lui $u(t,.)$ sau numai a lui $v(t,.)$, sau chiar numai a anumitor componente ale lui $u(t,.)$ sau $v(t,.)$, cînd $t\to\infty$.

De asemenea am văzut că ipotezele impuse implică unicitatea soluției staționare pentru problemele (3.1), (3.2), (3.a) (cu $f\equiv 0$ și $g\equiv 0$) și (3.1), (3.2), (3.3b) (cu $f\equiv 0$, $g\equiv 0$ și $e\equiv 0$). Vom vedea pe un exemplu că se pot găsi și condiții care să asigure convergența soluțiilor pentru $t\to\infty$ fără a implica unicitatea soluției staționare.

Teorema 3.10. *Presupunem îndeplinite ipotezele* (b_1), (b_2), (a_3), (b_4) *și în plus* $B=\partial\psi(\psi: D(\psi)=\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ *convexă și continuă*), $A^{-1}(0)=$ $=B^{-1}(0)=\{0\}$, $0\in L_1(0)$, $D(L_2)=\mathbf{R}^n$, $0\in L_2(0)$ *și*

(3.177) $\qquad(\exists\,[s,\ r]\in L_2$ *astfel încît* $(s,r)_{\mathbf{R}^n}=0)\Rightarrow(s=0)$.

Atunci $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *este unica soluție a problemei* (3.164), (3.165) *și*

(3.178) $\qquad u(t,.)\to 0$, *cînd* $t\to\infty$, *tare în* $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$,

(3.179) $\qquad v(t,.)\to 0$, *cînd* $t\to\infty$, *slab în* $L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$,

unde $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ *este o soluție slabă pe* $[0,+\infty[$ *a problemei* (3.1), (3.2), (3.3b).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă, în plus, $u_0,\ v_0 \in H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$ *astfel încît* $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ v_0(1) \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A}_1)$, *unde* $\mathscr{A}_1$ *este operatorul definit prin* (3.83), (3.84) *și* $f, g \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+\,;\,L^2(0,1\,;\mathbf{R}^n))$, $e \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+\,;\,\mathbf{R}^n)$ *atunci*

(3.178)′ $\qquad u(t,.) \to 0$, *cînd* $t \to \infty$, *slab în* $H^1(0,1\,;\,\mathbf{R}^n)$

(*unde* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *este soluția tare corespunzătoare datelor* $u_0, v_0\,;\, f, g, e$).

Demonstrație. Ne vom rezuma să arătăm că operatorul $\mathscr{A}_1$ este demipozitiv, de unde va rezulta convergența slabă a soluțiilor (vezi Teorema 1.3 și Teorema 1.5, ambele din Cap. II). Celelalte concluzii se arată într-o manieră devenită familiară în prezenta lucrare.

Evident $\hat{0} \in \mathscr{A}_1(\hat{0})$, unde $\hat{0}$ este elementul nul în $X_1 = L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n) \times L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$. Afirmăm că $\mathscr{A}_1$ este demipozitiv în raport cu $\hat{0}$. Pentru aceasta fie $\left\{\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \\ y_m \end{pmatrix}\right\}$ și $\left\{\begin{pmatrix} z_m \\ w_m \\ s_m \end{pmatrix}\right\}$ niște șiruri în X_1, astfel încît să avem următoarele

(3.180) $\qquad \begin{pmatrix} z_m \\ w_m \\ s_m \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_1 \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \\ y_m \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\left\{\begin{pmatrix} z_m \\ w_m \\ s_m \end{pmatrix}\right\}$ este mărginit,

(3.181) $\qquad \begin{cases} p_m \to p,\ q_m \to q \text{ slab în } L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n), \\ y_m \to y \qquad \text{în } \mathbf{R}^n, \end{cases}$

(3.182) $\qquad \lim_{m\to\infty} \left(\begin{pmatrix} z_m \\ w_m \\ s_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \\ y_m \end{pmatrix} \right)_{X_1} = 0.$

Ținînd seama de definiția operatorului $\mathscr{A}_1$, (3.182) ne conduce la

(3.183) $\qquad \lim_{m\to\infty} \mu_m(p_m) = 0$, unde $\mu_m \in \tilde{A}(p_m)$,

(3.184) $\qquad \lim_{m\to\infty} \int_0^1 (\delta_m(x),\ q_m(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx = 0$, unde $\delta_m \in \bar{B}(q_m)$,

(3.185) $\qquad \lim_{m\to\infty} (\nu_m,\ y_m)_{\mathbf{R}^n} = 0$, unde $\nu_m \in L_2(y_m)$.

Un procedeu asemănător cu cel din demonstrația Teoremei 3.7 implică prin intermediul relațiilor (3.183), (3.184) că $p(x) = q(x) = 0$, a.p.t. $x \in\,]0,1[$. Deoarece $D(L_2) = \mathbf{R}^n$ rezultă că L_2 este o aplicație mărginită pe mulțimi mărginite din $\mathbf{R}^n$. Deci șirul $\{\nu_m\}$ este mărginit. Deoarece L_2 este închisă, din (3.185) rezultă că $(\nu, y)_{\mathbf{R}^n} = 0$, unde $\nu \in L_2(y)$.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel (3.177) implică $y = 0$. În concluzie $\begin{pmatrix} p \\ q \\ y \end{pmatrix} = \hat{0} \in \mathscr{A}_1^{-1}(\hat{0})$, adică $\mathscr{A}_1$ este într-adevăr demipozitiv în raport cu $\hat{0}$. În particular $\mathscr{A}_1^{-1}(\hat{0}) = \{\hat{0}\}$. Astfel, Teorema 3.10 este dovedită. ■

3.3. Cîteva considerații asupra cazurilor cînd variabila spațială parcurge $\mathbf{R}_+$ sau $\mathbf{R}$

Evident în ac este cazuri vechile condiții la limită trebuie înlocuite în mod corespunză tor. Astfel, în cazul $x \in \mathbf{R}_+$ vom impune o condiție la limită în $x = 0$ și condiții asimptotice la $+\infty$ (vezi mai jos (3.195)); în cazul $x \in \mathbf{R}$ vechile condiții la limită se vor înlocui complet prin condiții asimptotice la $-\infty$ și la $+\infty$ (vezi mai jos (3.201)).

Mai întîi să considerăm problema

$$(3.186)\quad \begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + A(u) \ni f(t,\ x), \\ \beta(x)\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + B(v) \ni g(t,\ x), \end{cases}$$

pentru $0 < t < \infty$ și $0 < x < \infty$;

$$(3.187)\quad u(0,\ x) = u_0(x),\ v(0,\ x) = v_0(x), \text{ pentru } 0 < x < \infty,;$$

$$(3.188)\quad u(t,\ 0) \in L_3(v(t,\ 0)), \text{ pentru } 0 < t < \infty.$$

Notațiile de aici sînt similare cu cele utilizate în secțiunile precedente. Vom lucra în următoarele ipoteze:

(c_1) $L_3 : D(L_3) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o aplicație maximal monotonă,

(c_2) $A, B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sînt ambele aplicații maximal monotone cu $D(A) = D(B) = \mathbf{R}^n$ și, în plus,

$$\|A^0(r)\|_{\mathbf{R}^n} + \|B^0(r)\|_{\mathbf{R}^n} \leqslant \text{Const.}\ \|r\|_{\mathbf{R}^n}, \qquad \forall\ r \in \mathbf{R}^n,$$

unde A^0 și B^0 sînt secțiunile minimale ale aplicațiilor A și respectiv B.

(c_3) $\alpha_i,\ \beta_i \in L^\infty(\mathbf{R}_+)$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ și, mai mult, există $k_0 > 0$ astfel încît $\alpha_i(x) \geqslant k_0$, $\beta_i(x) \geqslant k_0$, a.p.t. $x \in \mathbf{R}_+$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, unde α_i, β_i sînt componentele neidentic nule ale matricilor diagonale α și respectiv β.

Considerăm spațiul produs $X^+ = L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n)$ și $Q^+ : D(Q^+) \subset X^+ \to X^+$ operatorul definit prin

$$(3.189)\quad D(Q^+) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X^+ ;\ p, q \in H^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n),\ p(0) \in L_3(q(0)) \right\},$$

$$(3.190)\quad Q^+ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q' \\ -p' \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(Q^+).$$

Lema 3.7. *Presupunem că ipoteza* (c_1) *este îndeplinită. Atunci operatorul* Q^+ *definit prin* (3.189), (3.190) *este maximal monoton.*

Demonstrație. Mai întîi să remarcăm că $D(Q^+) \neq \emptyset$. Apoi, este evident că dacă o funcție $p \in H^1(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n)$, atunci $p(+\infty) = 0$, unde $p(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} p(x)$. Cu această ultimă observație este ușor de văzut că operatorul Q^+ este monoton. Pentru a dovedi maximalitatea sa fie h, k arbitrare dar fixate în $L^2(\mathbf{R}^+ ; \mathbf{R}^n)$ și considerăm problema la limită

$$p - q' = h, \quad q - p' = k \text{ în } L^2(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n), \tag{3.191}$$

$$p(0) \in L_3(q(0)). \tag{3.192}$$

Datorită proprietăților cunoscute ale produsului de convoluție (vezi, de exemplu, W. Kecs [1]) este evident că funcțiile

$$z(x) = e^x \int_x^\infty e^{-s}(h(s) + k(s))\, ds, \quad x \in \mathbf{R}_+$$

și

$$w(x) = e^{-x}\left(y + \int_0^x e^s(h(s) - k(s))\, ds, \quad x \in \mathbf{R}_+\right.$$

(cu y arbitrar în $\mathbf{R}^n$)

aparțin spațiului $L^2(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n)$. De asemenea este doar un simplu exercițiu a verifica că funcțiile

$$\begin{cases} p(x) = (1/2)\ (z(x) + w(x)), & x \in \mathbf{R}_+ \\ q(x) = (1/2)\ (z(x) - w(x)), & x \in \mathbf{R}_+ \end{cases} \tag{3.193}$$

satisfac sistemul (3.191) pentru orice $y \in \mathbf{R}^n$. În particular p și q aparțin spațiului $H^1(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n)$. Vom arăta în continuare că există un vector $y \in \mathbf{R}^n$ astfel încît funcțiile corespunzătoare p și q definite prin relațiile (3.193) să verifice de asemenea condiția (3.192). Acest fapt exprimat cu ajutorul funcțiilor z și w înseamnă

$$(1/2)(z(0) + y) \in L_3((1/2)\ (z(0) - y)). \tag{3.194}$$

Însă ecuația (3.194) admite o soluție unică y datorită ipotezei (c_1). Prin urmare Q^+ este într-adevăr un operator maximal monoton. Demonstrația este încheiată. ■

Teorema 3.11. *Presupunem că ipotezele* (c_1), (c_2) *și* (c_3) *sînt satisfăcute. Fie* $f, g \in W^{1,1}(0, T ; L^2(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n))$ *și fie* $u_0, v_0 \in H^1(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n)$ *astfel încît* $u_0(0) \in L_3(v_0(0))$. *Atunci există o pereche unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *cu* $u, v \in W^{1,\infty}(0, T ; L^2(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n))$ *astfel încît pentru orice* $t \in [0, T[$ *funcțiile*

$$u(t,.), v(t,.) \in H^1(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n) \tag{3.195}$$

și satisfac sistemul (3.186), a.p.t. $x \in \mathbf{R}_+$ (*cu* $\partial^+ u/\partial t$, $\partial^+ v/\partial t$ *în loc de* $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$) *și condițiile* (3.187), (3.188).

Demonstrație. Notăm din nou cu $\bar{A}$ și $\bar{B}$ extensiile canonice la $L^2(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n)$ ale aplicațiilor A și B. Să remarcăm că dacă $p : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ este o funcție măsurabilă (în sens Lebesgue), atunci funcțiile $x \mapsto A^0(p(x))$ și $x \mapsto B^0(p(x))$ sînt de asemenea măsurabile pe $\mathbf{R}_+$ deoarece

$$A^0(y) = \lim_{\lambda \to 0^+} A_\lambda(y) \text{ și } B^0(y) = \lim_{\lambda \to 0^+} B_\lambda(y), \quad \forall y \in \mathbf{R}^n,$$

unde A_λ și B_λ, $\lambda > 0$, reprezintă și aici aproximantele Yosida ale aplicațiilor A și B, care după cum se știe sînt aplicații lipschitziene pe $\mathbf{R}^n$. Prin urmare ținîndu-se cont de ipoteza (c_2) se deduce că operatorul $\mathscr{B}^+ : X^+ \to X^+$ definit mai jos prin (3.196) este peste tot definit pe X^+ și maximal monoton.

$$(3.196)\qquad \mathscr{B}^+\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in X^+ ;\ h \in \bar{A}(p),\ k \in \bar{B}(q)\right\},\quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X^+.$$

Deci suma $Q^+ + \mathscr{B}^+$ este de asemenea un operator maximal monoton (conform Teoremei 1.6 cu Obs. 1.3, Cap. I). Astfel, problema Cauchy

$$(3.197)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + (Q^+ + \mathscr{B}^+)\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \end{pmatrix},\ 0 < t < T, \text{ în } X^+ \\ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}_{t=1} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

admite o soluție tare unică, întrucît conform ipotezelor

$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(Q^+ + \mathscr{B}^+)$ și $\begin{pmatrix} f(t,.) \\ g(t,.) \end{pmatrix} \in W^{1,1}(0,T;\ X^+)$ (vezi Teorema 2.1 din Cap. I). Evident perechea $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ este soluție pentru problema (3.186) ~ (3.188) (cu $\alpha(x) = \beta(x) = I_n$, a.p.t. $x \in \mathbf{R}_+$) în sensul indicat în enunțul teoremei. Cazul general cînd α, β nu sînt identic egale cu I_n se reduce la cazul normalizat în maniera cunoscută din secțiunile precedente, adică: se schimbă spațiul de bază X^+ cu spațiul

$$X^+_{\alpha\beta} = L^2_{\alpha_1}(\mathbf{R}_+) \times \ldots \times L^2_{\alpha_n}(\mathbf{R}_+) \times L^2_{\beta_1}(\mathbf{R}_+) \times \ldots \times L^2_{\beta_n}(\mathbf{R}_+);$$

se înlocuiește operatorul $Q^+ + \mathscr{B}^+$ cu operatorul $\mathscr{E}_{\alpha\beta} : D(Q^+ + \mathscr{B}^+) \subset X^+_{\alpha\beta} \to X^+_{\alpha\beta}$ definit prin

$$\mathscr{E}_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n}\right)(Q^+ + \mathscr{B}^+)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(Q^+ + \mathscr{B}^+),$$

care este maximal monoton pe spațiul $X^+_{\alpha\beta}$; de asemenea, f și g se înlocuiesc cu funcțiile f_α și g_β definite prin

$$f_\alpha(t, x) = [\alpha(x)]^{-1} f(t, x),\ g_\beta(t, x) = [\beta(x)]^{-1} g(t, x).$$

Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Observația 3.23. Evident mulțimea $D(Q^+ + \mathscr{B}^+)$ este densă în X^+ (sau, echivalent, în $X^+_{\alpha\beta}$). Deci, pentru $u_0, v_0 \in L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}^n)$ și $f, g \in L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}^n))$ problema (3.186) ~ (3.188) admite o soluție slabă unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0,T];\ X^+)$ în sensul că $\begin{pmatrix} u(t,.) \\ v(t,.) \end{pmatrix}$ este soluție slabă pentru problema Cauchy corespunzătoare asociată operatorului $\mathscr{E}_{\alpha\beta}$.

Observația 3.24. În locul condiției la limită (3.188) se pot considera și alte tipuri de condiții la limită. De exemplu, drept condiții la limită în $x = 0$ se pot considera m ecuații diferențiale ($0 < m \leqslant n$) de tip mono-

ton împreună cu $n - m$ ecuații algebrice. Într-adevăr, fie Π_m și Π_{n-m} aplicațiile de proiecție de la $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$ pe spațiile factor și să considerăm condițiile la limită

$$(3.198)\quad \begin{cases} \Pi_m(u(t,0)) \in N \dfrac{\partial}{\partial t} \Pi_m (v(t,0)) + L_4(\Pi_m(v(t,0))) + \tilde{e}(t), \quad 0 < t < T \\ \Pi_{n-m}(u(t,0)) \in L_5(\Pi_{n-m}(v(t,0))), \quad 0 < t < T, \end{cases}$$

unde $L_4 : D(L_4) \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ și $L_5 : D(L_5) \subset \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}^{n-m}$ sînt niște aplicații maximal monotone, N este o matrice diagonală pozitiv definită iar $\tilde{e} :]0, T[\to \mathbf{R}^m$ este o funcție dată.

Spațiul de bază va fi în acest caz $L^2(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}_+ ; \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^m$. Lăsăm în seama cititorului analizarea problemei (3.186), (3.187), (3.198), recomandînd ca model studiul problemei (3.1), (3.2), (3.3b).

În cele ce urmează prezentăm cîteva cuvinte despre cazul $x \in \mathbf{R}$. După cum am remarcat deja în acest caz vechile condiții la limită se înlocuiesc prin condiții asimptotice la $-\infty$ și la $+\infty$. Considerăm așadar problema Cauchy (3.186), (3.187), de data aceasta pentru $0 < t < \infty$ și $-\infty < x < +\infty$. Drept spațiu de bază se consideră spațiul produs $Y = L^2(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$. În acest caz vom păstra neschimbată ipoteza (c_2) de mai sus iar în loc de (c_3) vom presupune :
$(c_3)'$ $\alpha_i, \beta_i \in L^\infty(\mathbf{R})$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ și în plus există $k_0 > 0$ astfel încît $\alpha_i(x) \geqslant k_0$, $\beta_i(x) \geqslant k_0$, a.p.t. $x \in \mathbf{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Lema 3.8. *Operatorul liniar $Q_\infty : D(Q_\infty) \subset Y \to Y$ definit prin*

$$(3.199)\quad D(Q_\infty) = H^1(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n) \times H^1(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$$

$$(3.200)\quad Q_\infty \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q' \\ -p' \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(Q_\infty)$$

este antiadjunct și maximal monoton.

Demonstrație. Dacă p este o funcție din $H^1(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$, atunci avem $p(-\infty) = p(+\infty) = 0$. Așadar avem evident $Q_\infty^* = -Q_\infty$, unde Q_∞^* este adjunctul operatorului Q_∞. Deoarece Q_∞ este antiadjunct urmează că este în particular monoton. Pentru a arăta maximalitatea lui Q_∞ se consideră sistemul (3.191) pe spațiul $L^2(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$, unde funcțiile h, k sînt arbitrare dar fixate în $L^2(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$.

Se consideră funcțiile z și w definite prin

$$z(x) = e^x \int_x^\infty e^{-s}(h(s) + k(s))\, ds, \qquad x \in \mathbf{R}$$

și

$$w(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^s (h(s) - k(s))\, ds, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Din proprietățile produsului de convoluție rezultă că $z, w \in L^2(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$ (vezi din nou W. Kecs [1]). Apoi se poate verifica cu ușurință că funcțiile $p = (1/2)(z + w)$ și $q = (1/2)(z - w)$ satisfac sistemul (3.191) considerat de data aceasta în $L^2(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$. Deci Q_∞ este maximal monoton. Astfel demonstrația lemei este încheiată. ■

Teorema 3.12. *Presupunem îndeplinite ipotezele (c_2) și $(c_3)'$. Fie $f, g \in W^{1,1}(0, T ; L^2(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n))$ și $u_0, v_0 \in H^1(\mathbf{R} ; \mathbf{R}^n)$. Atunci, există perechea*

unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *cu* $u,\ v \in W^{1,\infty}(0,\ T\,;\ L^2(\mathbf{R}\,;\ \mathbf{R}^n))$ *astfel încît pentru orice* $t \in$ $\in [0,\ T\ [$ *funcţiile*

$$u(t,.),\ v(t,.) \in H^1(\mathbf{R}\,;\ \mathbf{R}^n) \tag{3.201}$$

şi satisfac sistemul (3.186), a.p.t. $x \in \mathbf{R}$ (*cu* $\partial^+ u/\partial t$ *şi* $\partial^+ v/\partial t$ *în loc de* $\partial u/\partial t$ *şi* $\partial v/\partial t$) *şi condiţiile iniţiale* (3.187).

Demonstraţie. Se notează tot cu $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ extensiile canonice la $L^2(\mathbf{R}\,;\ \mathbf{R})$ ale aplicaţiilor A şi B. Atunci, ţinîndu-se seama de ipoteza (c_2), se deduce că operatorul $\mathcal{G} : D(\mathcal{G}) = Y \to Y$ definit prin $\mathcal{G}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \right.$ $\in Y\ ;\ h \in \bar{A}(p),\ k \in \bar{B}(q)\Big\}$, $\forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in Y$ este maximal monoton. Făcîndu-se observaţia că operatorul $Q_\infty + \mathcal{G} : D(Q_\infty) \subset Y \to Y$ este maximal monoton se consideră problema Cauchy asociată operatorului $Q_\infty + \mathcal{G}$. Soluţia tare a acestei probleme va fi exact perechea $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ despre care se vorbeşte în enunţul teoremei. ∎

Observaţia 3.25. Şi în cazul $x \in \mathbf{R}$ se poate vorbi despre soluţie slabă. Astfel sistemul (3.186) (unde $0 < t < T$ şi $-\infty < x < +\infty$) cu condiţiile iniţiale (3.187) admite pentru $u_0,\ v_0 \in L^2(\mathbf{R}\,;\ \mathbf{R}^n)$ şi $f,\ g \in$ $\in L^1(0,\ T\,;\ L^2(\mathbf{R}\,;\ \mathbf{R}^n))$ o soluţie slabă unică $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0,\ T]\,;\ Y)$.

3.4. Exemple

Exemplul 1. Ecuaţiile care guvernează curgerea variabilă a unui fluid cu frecare neliniară pe conductă (vezi W. Hsiung Li [1]) sînt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g_0 \alpha v |v| = 0, \tag{3.202}$$

pentru $t > 0,\ 0 < x < 1$

cu condiţiile iniţiale şi la limită

$$\Phi(0,\ x) = \Phi_1(x)\ ;\ v(0,\ x) = v_0, \qquad 0 < x < 1, \tag{3.203}$$

$$\Phi(t,\ 0) = \Phi_0\ ;\ v(t,\ 1) = 0, \qquad t > 0 \tag{3.204}$$

unde v_0, Φ_0 sînt (funcţii) constante, iar c, g_0, α sînt nişte constante pozitive. Necunoscutele Φ şi v sînt funcţii scalare. Făcînd schimbările $v := -v$ şi $u := \Phi$ se observă că problema (3.202) ~ (3.204) devine de tip (3.1). (3.2), (3.3a) cu $A,\ B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$A(r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbf{R}$$

$$B(r) = g_0 \alpha r |r|, \qquad \forall r \in \mathbf{R},$$

Scanned with OKEN Scanner

apoi $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ și $L = \partial l_1$, unde $l_1 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to]-\infty, +\infty]$ este definită prin

$$l_1(r, s) = \begin{cases} \Phi_0 r, & \text{dacă } s = 0 \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Evident l_1 este o funcție convexă și semicontinuă inferior. Se observă că datele inițiale $\Phi_1(.)$ și v_0 nu satisfac condiția de consistență deoarece în general $v_0 \neq 0$. Cu alte cuvinte $(\Phi_1(.), -v_0) \notin D(\mathscr{B})$ (vezi (3.46), (3.47). De aceea, problema (3.202) ~ (3.204) admite doar soluție slabă.

Propoziția 3.4. (Existența). *Presupunem că* $\Phi_1 \in L^2(0,1)$. *Atunci problema* (3.202) ~ (3.204) *considerată pentru* $0 < t < T$ *admite o soluție slabă unică* $\begin{pmatrix} \Phi \\ v \end{pmatrix} \in C([0, T]; L^2(0,1)) \times C([0, T]; L^2(0,1))$ (*vezi Definiția* 2.2, *Cap.* I *și Observația* 3.10)

Demonstrație. Cum am spus mai sus prin schimbarea $u := \Phi$ și $v := -v$ problema în discuție devine de tip (3.1), (3.2), (3.3a). Evident ipotezele (a_1), $(a_2)'$ și (a_3) sînt toate îndeplinite. Concluzia propoziției urmează atunci din Teorema 3.2, Observația 3.10 și Propoziția 3.1. ■

Propoziția 3.5. (Comportarea asimptotică a soluțiilor). *Presupunem că* $\Phi_1 \in L^2(0,1)$. *Fie* $\begin{pmatrix} \Phi \\ v \end{pmatrix} \in C([0, +\infty[; L^2(0,1)) \times C([0, +\infty[; L^2(0,1))$ *soluția slabă a problemei* (3.202) ~ (3.204) *considerate pentru* $0 < t < +\infty$. *Atunci*

$$\Phi(t,.) \to \Phi_0, \quad \textit{pentru } t \to \infty, \textit{ tare în } L^2(0,1),$$

$$v(t,.) \to 0, \quad \textit{pentru } t \to \infty, \textit{ tare în } L^2(0,1).$$

Demonstrație. Existența este asigurată de Propoziția 3.4. Apoi, se vede ușor că problema (3.202) ~ (3.204) admite o singură soluție staționară și anume perechea $\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Condițiile (a_1), $(a_2)'$; (a_3), (a_4) și $(a)_5$ fiind îndeplinite vom arăta că și (a_6) este îndeplinită și atunci se poate aplica Teorema 3.5. Întrucît funcția B este univocă și strict crescătoare este suficient să arătăm că L^{-1} satisface proprietatea (P), unde $L = \partial l_1$. Dar acest fapt se observă imediat deoarece $D(L^{-1}) = R(L) = \{|\Phi_0\} \times \mathbf{R}$. Astfel (a_6), (iii) este într-adevăr verificată. Concluzia propoziției urmează atunci din Teorema 3.5. ■

Exemplul 2. Problema pe care o analizăm în cele ce urmează își are originea tot în hidraulică. Ea constituie un model matematic al curgerii unui fluid printr-un sistem de conducte structurat sub formă de arbore (vezi V. Barbu [5] și V. Iftimie [1])

$$(3.205) \quad \begin{cases} \alpha_i(x) \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \dfrac{\partial v_i}{\partial x} + v_i |u_i|^{p_i - 1} = f_i(t, x), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \beta_i(x) \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = g_i(t, x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$\text{pentru } t > 0 \text{ și } 0 < x < 1,$$

$$u_i(0,x)=u_0^i(x),\ v_i(0,x)=v_0^i(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ i=1,2,\ldots,n, \tag{3.206}$$

$$\begin{cases} u_i(t,0)=0, & \text{dacă } i=1,2,\ldots,m \\ -u_1(t,1)=\ldots=-u_m(t,1)=u_{m+1}(t,0)=\ldots=u_n(t,0) \\ \sum_{i=1}^{m} v_i(t,1)=\sum_{i=m+1}^{n} v_i(t,0) \\ v_i(t,1)=0, & \text{dacă } m+k+1\leqslant i\leqslant n \\ u_i(t,1)+(q_i+1)\,v_i(t,1)\,|v_i(t,1)|^{q_i-1}=0, \\ \qquad\qquad \text{dacă } m+1\leqslant i\leqslant m+k;\ \text{pentru } t>0, \end{cases} \tag{3.207}$$

unde $n=m+k+p$, $1\leqslant p_i<+\infty$, $1\leqslant q_i<+\infty$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Deși pare complicat, condițiile la limită (3.207) se pot scrie sub forma (3.3a), luînd drept L subdiferențiala funcției $l_2:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\,]-\infty,+\infty]$ definite prin

$$l_2(r,s)=\begin{cases}\sum_{i=m+1}^{m+k}|s_i|^{q_i+1}, \text{ dacă } s_i=0, \text{ pentru } m+k+1\leqslant i\leqslant n \text{ și } \sum_{i=1}^{m}s_i=\sum_{i=m+1}^{n}r_i,\\ +\infty, \text{ în rest.}\end{cases}$$

Evident l_2 este convexă și semicontinuă inferior. Problema (3.205) $\sim$ (3.207) este de tipul problemei (3.1), (3.2), (3.3a) și sînt îndeplinite ipotezele (a_1) și $(a_2)'$. Astfel, aplicînd Teorema 3.2 acestei probleme, considerate pe intervalul $[0,T]$, urmează direct

Propoziția 3.6. (Existența). *Presupunem că funcțiile* α_i *și* β_i, $i=1,2,\ldots,n$ *satisfac ipoteza* (a_3) *și fie* $f=(f_1,\ldots,f_n)$, $g=(g_1,\ldots,g_n)\in W^{1,1}(0,T;L^2(0,1;\mathbf{R}^n))$ *și* $u_0=(u_0^1,\ldots,u_0^n)$, $v_0=(v_0^1,\ldots,v_0^n)\in H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$ *astfel încît sînt satisfăcute condițiile de consistență:*

$$\begin{cases} u_0^i(0)=0, \text{ dacă } i=1,2,\ldots,m \\ -u_0^1(1)=\ldots=-u_0^m(1)=v_0^{m+1}(0)=\ldots=v_0^n(0) \\ \sum_{i=1}^{m}v_0^i(1)=\sum_{i=m+1}^{n}v_0^i(0) \\ v_0^i(1)=0, \text{ dacă } m+k+1\leqslant i\leqslant n \\ u_0^i(1)+(q_i+1)\,v_0^i(1)\,|v_0^i(1)|^{q_i-1}=0, \text{ dacă } m+1\leqslant i\leqslant m+k. \end{cases} \tag{3.208}$$

Atunci există o pereche unică $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ *avînd toate proprietățile specificate în enunțul Teoremei* 3.2 *care verifică problema* (3.205) $\sim$ (3.207).

Observația 3.26. Dacă $u_0,v_0\in L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$ și $f,g\in L^1(0,T;L^2(0,1;\mathbf{R}^n))$, atunci problema (3.205) $\sim$ (3.207) admite doar o soluție slabă $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in C([0,T];L^2(0,1;\mathbf{R}^n))\times C([0,T];L^2(0,1;\mathbf{R}^n))$. Vezi Observația 3.10 și Propoziția 3.1.

Vom continua prin enunțarea unui rezultat de comportare asimptotică a soluțiilor pentru problema (3.205) $\sim$ (3.207), rezultat care nu se încadrează în nici una dintre teoremele demonstrate anterior deoarece, după cum se va vedea, există mai multe soluții staționare.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.13. (Comportarea asimptotică a soluțiilor). *Presupunem îndeplinite ipotezele* (a_3) *și* (a_4) *și fie* $u_0,\ v_0 \in L^2(0,1;\mathbf{R}^n)$. *Atunci, pentru* $t \to \infty$,

$$u_i(t,\cdot) \to 0, \text{ pentru } i = 1,\dots,n \text{ tare în } L^2(0,1), \tag{3.209}$$

$$v_i(t,\cdot) \to 0, \text{ pentru } m+1 \leqslant i \leqslant n, \text{ tare în } L^2(0,1), \tag{3.210}$$

$$v_i(t,\cdot) \to K_i, \text{ pentru } 1 \leqslant i \leqslant m, \text{ tare în } L^2(0,1), \tag{3.211}$$

unde $K_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ *sînt niște constante reale satisfăcînd relația* $\sum_{i=1}^{m} K_i = 0$.

Dacă, în plus, $f_i, g_i \in W^{1,1}(\mathbf{R}_+; L^2(0,1)), i=1,2,\dots,n,\ u_0, v_0 \in H^1(0,1;\mathbf{R}^n)$ *și* $(u_0(0), -u_0(1)) \in \partial l_2(v_0(0), v_0(1))$ *(adică* u_0, v_0 *verifică condițiile* (3.208)), *atunci* (3.209), (3.210), (3.211) *au loc în topologia slabă a spațiului* $H^1(0,1)$. *Prin* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *am notat soluția problemei* (3.205) ~ (3.207) *corespunzătoare datelor* $(u_0, v_0; f, g)$.

Demonstrație. Deoarece sînt îndeplinite condițiile (a_1), $(a_2)'$ și (a_3) existența soluțiilor slabe sau tari este asigurată de Propoziția 3.6 și Observația 3.26. Proprietățile de compactitate ale traiectoriilor soluțiilor rezultă din demonstrația Teoremei 3.5. Printr-un calcul elementar se ajunge la concluzia că mulțimea soluțiilor staționare pentru problema omogenă ($f \equiv 0$ și $g \equiv 0$) este $F = \mathscr{B}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix};\ \xi_i(x) = 0,\ \forall x \in [0,1], \right.$ pentru $m+1 \leqslant i \leqslant n$ și $\xi_i(x) = K_i,\ \forall x \in [0,1]$, pentru $0 \leqslant i \leqslant m$, $\left.$ unde K_i sînt toate constantele reale care satisfac relația $\sum_{i=1}^{m} K_i = 0 \right\}$.

Deoarece evident F nu se reduce la un singur element urmează că nici una dintre ipotezele (a_6), $(a_6)'$ nu este îndeplinită, deoarece acestea implicau unicitatea soluției staționare pentru problema omogenă. Deci nu putem aplica rezultatele teoretice anterioare de comportare asimptotică. Pentru a dovedi (3.209) ~ (3.211) se poate presupune, fără a se restrînge generalitatea, că $\alpha_i(x) = \beta_i(x) = 1$, a.p.t. $x \in]0,1[$, $i = 1, 2, \dots, n$; $f \equiv 0, g \equiv 0$ și $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$. Deci $\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \subset D(\mathscr{B})$. Vom arăta că $\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \subset F$. Fie așadar $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ o pereche arbitrară din $\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Notăm, ca în demonstrația Teoremei 3.5,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(t,\cdot) \\ \tilde{v}(t,\cdot) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},\quad t \in \mathbf{R}.$$

Atunci, întrucît $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$, $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ satisface sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^+ \tilde{u}_i}{\partial t} - \dfrac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} + \tilde{u}_i |\tilde{u}_i|^{\rho_i - 1} = 0,\ i = 1, \dots, n, \\ \dfrac{\partial^+ \tilde{v}_i}{\partial t} - \dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} = 0,\ i = 1,\dots,n, \text{ pentru } 0 < x < 1,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{3.212}$$

Scanned with OKEN Scanner

și condițiile la limită

$$(\tilde{u}(t,\ 0) - \tilde{u}(t,\ 1)) \in \partial l_2(\tilde{v}(t,\ 0),\ \tilde{v}(t,\ 1)),\ t \in \mathbf{R}. \tag{3.213}$$

Deoarece funcțiile $A_i(r) = r|r|^{p_i - 1}$ sînt strict crescătoare rezultă, procedînd ca în Teorema 3.5, că

$$\tilde{u}(t,\ x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1],\ t \in \mathbf{R}. \tag{3.214}$$

Am folosit și faptul că proiecția mulțimii F pe primul spațiu factor al lui X este $\{0\}$. Folosind (3.212) și (3.214) se obține că (3.215) $\tilde{v}(t,\ x) = K$ (un vector constant din $\mathbf{R}^n$), $\forall x \in [0,\ 1]$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Prin urmare $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$ este un punct fix pentru semigrupul $\{S(t)\,;\ t \geqslant 0\}$, adică aparține mulțimii F. Mai precis, componentele K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ale vectorului K satisfac relațiile: $K_i = 0$, pentru $m + 1 \leqslant i \leqslant n$ și $\sum_{i=1}^{m} K_i = 0$. Așadar, $\omega\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \subset F$. Conform Teoremei 1.4 și Propoziției 2.3 din Cap. II soluția $\begin{pmatrix} u(t,\ .) \\ v(t,\ .) \end{pmatrix} = S(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ converge tare în X, cînd $t \to \infty$ la o pereche $\begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} \in F$. Deci (3.209) — (3.211) sînt dovedite. Avîndu-se în vedere proprietățile de compactitate ale orbitelor soluțiilor dovedite deja în Teorema 3.5 se obține imediat și a doua parte a Teoremei 3.13. ■

Exemplul 3. Un model matematic pentru fenomenele de propagare în rețelele electrice de transmisie (vezi K. L. Cooke [1] sau A. Halanay și V. Răsvan [1]) este problema următoare

$$\begin{cases} L\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + Ru + e(t,\ x) = 0, \\ C\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + Gv = 0 \end{cases} \tag{3.216}$$

$$\text{pentru } 0 < x < 1,\ t > 0,$$

$$u(0,\ x) = -\,i_0(x)\,;\ v(0,\ x) = v_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.217}$$

$$v(t,\ 0) = R_0 u(t,\ 0)\,;\ -\,u(t,\ 1) \in f_0(v(t,\ 1)),\ t > 0, \tag{3.218}$$

unde: $i = -\,u$ este intensitatea curentului pe linie iar v este tensiunea; constantele R și R_0, L, G, C sînt respectiv rezistențe, inductanța, conductanța și capacitatea caracteristice liniei; e este o tensiune distribuită pe linie.

Să presupunem că

$$L > 0,\ C > 0,\ R \geqslant 0,\ G \geqslant 0,\ R_0 > 0. \tag{3.219}$$

Aplicația $f_0 : D(f_0) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se presupune că este maximal monotonă. Din punct de vedere fizic f_0 reprezintă o rezistență neliniară la un capăt al liniei.

Evident, problema (3.216) ~ (3.218) este un caz particular al problemei (3.1), (3.2), (3.3a) cu A, $B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $L : \mathbf{R} \times D(f_0) \to \mathbf{R}^2$ definite după cum urmează

$$A(r) = Rr, \qquad \forall r \in \mathbf{R}$$

$$B(r) = Gr, \qquad \forall r \in \mathbf{R}$$

$$L\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 ;\ \bar{r} = (1/R_0)\, r \text{ și } \bar{s} \in f_0(s) \right\}.$$

Propoziția 3.7. (Existența). *Presupunem îndeplinite condițiile* (3.219) *și în plus,*

(3.220) $\qquad f_0 : D(f_0) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este maximal monotonă.*

Fie $e \in W^{1,1}(0,\ T; L^2(0,1))$ *și* $u_0,\ v_0 \in H^1(0,1)$ *astfel încît*

(3.221) $\qquad v_0(0) = R_0 u_0(0)$ și $-u_0(1) \in f_0(v_0(1))$.

Atunci problema (3.216) ~ (3.218) *considerată pentru* $t \in [0,\ T]$ *admite o soluție unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *cu proprietățile specificate în enunțul Teoremei* 3.2.

Demonstrație. Evident ipotezele (a_1), $(a_2)'$ și (a_3) sînt satisfăcute și $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{B})$, unde $D(\mathscr{B})$ este mulțimea dată prin (3.46). Astfel, propoziția urmează din Teorema 3.2. ■

Observația 3.27. Dacă $u_0,\ v_0 \in L^2(0,1)$ și $e \in L^1(0,\ T;\ L^2(0,1))$, atunci problema (3.216) — (3.218), considerată pentru $t \in [0,\ T]$, admite doar soluție slabă $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0,\ T];\ L^2(0,1)) \times C([0,\ T];\ L^2(0,1))$. Vezi din nou Observația 3.10 și Propoziția 3.1.

Propoziția 3.8. (Existența și unicitatea soluției staționare) *Presupunem că* f_0 *satisface* (3.220) *și că* $R \geqslant 0$, $G \geqslant 0$ *și* $R_0 > 0$. *Atunci există o pereche unică* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H^1(0,1) \times H^1(0,1)$ *care satisface problema la limită*

(3.222) $\qquad -q'(x) + Rp(x) = 0,\ -p'(x) + Gq(x) = 0,$ a.p.t. $x \in\ ]0,1[,$

(3.223) $\qquad q(0) = R_0 p(0),\ -p(1) \in f_0(q(1))$.

Demonstrație. Dacă $R > 0$ și $G > 0$, atunci demonstrația este similară cu demonstrația maximalității operatorului Q din Lema 3.1. Presupunem acum $R = 0$ și $G > 0$. Soluția generală a sistemului (3.222) este atunci : $p(x) = Gax + b$, $q(x) = a$ cu $a,\ b \in \mathbf{R}$. Impunînd perechii $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ să satisfacă (3.223) se obține sistemul $a = R_0 b,\ 0 \in Ga + b + f_0(a)$ care determină unic constantele a și b. În mod analog se rezolvă și celelalte cazuri posibile ($R > 0$, $G = 0$; $R = G = 0$). ■

Propoziția 3.9. (Comportarea asimptotică a soluțiilor). *Presupunem că ipotezele* (3.219) *și* (3.220) *sînt îndeplinite, și, în plus, măcar una dintre constantele* R, G *este strict pozitivă. Fie* $e \in L^1(\mathbf{R}_+ ; L^2(0,1))$ *și* $u_0,\ v_0 \in L^2(0,1)$.

Atunci

(3.224) $$u(t,.) \to p,\ v(t,.) \to q,\ \text{cînd } t \to \infty,\ \text{tare în } L^2(0,1),$$

unde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *este soluția slabă a problemei* (3.216) ~ (3.218), *considerate pentru* $t \in \mathbf{R}_+$ *iar* $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H^1(0,1) \times H^1(0,1)$ *este soluția (unică) a problemei* (3.222), (3.223). *Dacă în plus* u_0, v_0 *sînt din* $H^1(0,1)$ *și verifică* (3.221), *atunci* (3.224) *au loc în topologia slabă a spațiului* $H^1(0,1)$.

Demonstrație. Sînt îndeplinite condițiile (a_1), $(a_2)'$, (a_3), (a_4), (a_5) și (a_6), deci se poate aplica Teorema 3.5. ■

În continuare ne vom ocupa de cazul condițiilor la limită de tip global. Mai exact, vom considera din nou sistemul (3.216) cu condițiile inițiale (3.217) și cu condițiile la limită (cf. K.L. Cooke și W. L. Krumme [1] sau V. Răsvan [2, p. 108])

(3.225) $$\begin{cases} v(t,0) = R_0 u(t,0), & t > 0 \\ -u(t,1) \in C_1 \dfrac{\partial v(t,1)}{\partial t} + f_0(v(t,1)), & t > 0. \end{cases}$$

Propoziția 3.10. (Existența). *Presupunem îndeplinite ipotezele* (3.219), (3.220) *și în plus presupunem că* $C_1 > 0$. *Fie* $e \in W^{1,1}(0, T; L^2(0,1))$ *și* $u_0, v_0 \in H^1(0,1)$ *astfel încît* $v_0(1) \in D(f_0)$ *și* $v_0(0) = R_0 u_0(0)$. *Atunci problema* (3.216), (3.217), (3.225) *admite o soluție unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(0,1)) \times$ $\times W^{1,\infty}(0, T; L^2(0,1))$ *cu proprietățile specificate în enunțul Teoremei* 3.4.

Demonstrație. Sînt îndeplinite condițiile (b_1), $(a_2)'$ și (a_3), deci se poate aplica direct Teorema 3.4. ■

Observația 3.28. Ca și în cazul condițiilor la limită locale se pot da condiții pentru existența soluțiilor slabe. De asemenea se poate enunța o propoziție analogă cu Propoziția 3.9. Pentru aceasta se ține seama de Teorema 3.8.

În continuare dorim să propunem o *problemă de control* legată de exemplul de față care nu numai că prezintă interes teoretic dar ar putea avea implicații practice deosebite. Astfel, să considerăm din nou problema (3.216), (3.217), (3.218) și cerem ca $u(t, x) = -i(t, x)$ să devieze cît mai puțin posibil de la un interval prescris $K = [a, b] \subset \mathbf{R}$. Pentru a realiza acest lucru se consideră o tensiune $\tilde{e}$, distribuită pe linie conform cu următoarea lege (de *feedback*)

(3.226) $$\tilde{e}(u) = \partial I_K(u),$$

unde I_K este funcția indicatoare a intervalului K.

Astfel în loc de sistemul (3.216) vom avea sistemul

(3.227) $$\begin{cases} L\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + Ru + \partial I_K(u) + e(t, x) \ni 0 \\ C\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + Gv = 0 \end{cases}$$

pentru $0 < x < 1$ și $t > 0$.

Propoziția 3.11. (Existență). *Presupunem îndeplinite ipotezele Propoziției 3.7 și, în plus,*

$$R(f_0) \cap]-b, -a[\neq \emptyset, \tag{3.228}$$

$$u_0(x) \in [a, b], \forall x \in [0,1]. \tag{3.229}$$

Atunci problema (3.227), (3.217), (3.218) *admite o soluție unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in$ $\in W^{1,\infty}(0,T; L^2(0,1)) \times W^{1,\infty}(0, T; L^2(0,1))$ *satisfăcînd toate proprietățile din Teorema* 3.1.

Demonstrație. Condiția (3.228) asigură verificarea condiției (a_2), $(*)$ iar condițiile (3.221) și (3.229) implică faptul că perechea de date inițiale $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(\mathscr{A})$, unde $\mathscr{A}$ este operatorul definit prin (3.6) și (3.7). Astfel toate condițiile Teoremei 3.1 sînt îndeplinite. ■

Observația 3.29. Ideea considerării acestei probleme de control ne-a fost furnizată de cartea lui G. Duvaut și J. L. Lions [1, p. 21], unde este discutată problema „controlului termostatic" pentru ecuația căldurii. Modelul propus aici este un model ideal datorită considerării legii de feedback (3.226). Controlul este perfect realizat deoarece avem, pentru orice $t \geqslant 0$,

$$u(t, x) \in D(\hat{c}\, I_K) = [a, b], \forall x \in [0, 1],$$

adică tocmai ceea ce ne-am propus.

Pentru a obține modele realiste, aplicabile în practică se pot considera următoarele legi de feedback în locul legii (3.226) :

$$\tilde{e}(u) = \begin{cases} k_1(u-a), & \text{dacă } u < a \\ 0 \quad , & \text{dacă } a \leqslant u \leqslant b \\ k_2(u-b), & \text{dacă } u > b \end{cases}$$

sau, în cazul cînd tensiunea distribuită pe linie este limitată,

$$\tilde{e}(u) = \begin{cases} c \quad , & \text{dacă } u < a + c/k_1 \\ k_1(u-a), & \text{dacă } a + c/k_1 \leqslant u < a \\ 0 \quad , & \text{dacă } a \leqslant u \leqslant b \\ k_2(u-b), & \text{dacă } b < u \leqslant b + d/k_2 \\ d \quad , & \text{dacă } u > b + d/k_2 \end{cases}$$

unde c, d, k_1 și k_2 sînt niște constante, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$.

Evident în ambele cazuri există $\tilde{\varphi} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexă și continuă astfel încît $\tilde{e}(u) = \partial\tilde{\varphi}(u)$ și anume $\tilde{\varphi}(u) = \int_0^u \tilde{e}(s)ds$. Existența soluțiilor pentru problema (3.227) (cu $\partial\tilde{\varphi}(u)$ în loc de $\partial I_k(u)$, (3.217), (3.218) este asigurată de Teorema 3.2.

Vom enunța acum un rezultat analog Propoziției 3.11 pentru cazul condițiilor la limită de tip global.

Propoziția 3.12. (Existența). *Presupunem îndeplinite ipotezele Propoziției* 3.10 *și, în plus, au loc* (3.228) *și* (3.229). *Atunci problema* (3.227), (3.217), (3.225) *admite o soluție unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \times W^{1,\infty}(0, T; L^2(0,1))$ *cu proprietățile specificate în enunțul Teoremei* 3.3.

Demonstrație. Avem $A(u) = Ru + \partial I_K(u)$, $B(v) = Gv$, $L_1 = (1/R_0)\, I$, $L_2 = f_0$. Evident ipotezele (b_1), (b_2) și (a_3) sînt îndeplinite. De asemenea este clar că $(u_0, v_0, v_0(1)) \in D(\mathscr{A}_1)$, unde $\mathscr{A}_1$ este operatorul definit prin (3.83), (3.84). Prin urmare Teorema 3.3 se poate aplica. Astfel Propoziția 3.12 este complet demonstrată. ■

Observația 3.30. Și în cazul condițiilor la limită globale se pot considera legi de feedback de tipul celor prezentate în observația precedentă. De asemenea, atît în cazul condițiilor la limită locale cît și în cazul condițiilor la limită globale se pot alege drept mulțime K și alte mulțimi convexe și închise. Spre exemplu, $K = [a, +\infty[$.

Să revenim puțin la modelul ideal $\tilde{e}(u) = \partial I_K(u)$, $K = [a, b]$ și să ne plasăm în condițiile Propoziției 3.11 sau ale Propoziției 3.12. Să considerăm pentru fiecare $t > 0$ mulțimile

$$E(t) = \{x \in [0,1];\ a < u(t, x) < b\},$$

$$E_1(t) = \{x \in [0,1];\ u(t, x) = a\},$$

$$E_2(t) = \{x \in [0,1];\ u(t, x) = b\}.$$

Evident $E(t)$ este o mulțime deschisă în timp ce $E_1(t)$ și $E_2(t)$ sînt închise, deoarece $u(t,.)$ este continuă pe $[0,1]$. Dacă în (3.50) se consideră w de forma $w(x) = u(t, x) \pm \varepsilon\xi(x)$, cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic și $\xi \in C_0^\infty(E(t))$, atunci printr-un raționament ușor găsim că $(\partial/\partial x)\, v_s(t,.) = 0$ pe $E(t)$, în sensul distribuțiilor. De asemenea, tot în sensul distribuțiilor $(\partial/\partial x)\, v_s(t,.) \leqslant 0$ pe $E_1(t)$ și $\geqslant 0$ pe $E_2(t)$. Pe $E(t)$ funcția $v(t,.)$ este continuă deoarece $(\partial v/\partial x)\,(t,.) = \dot{v}_x\,(t,.) \in L^1(E(t))$.

Discontinuitățile pentru funcția $v(t,.)$ apar în momentul cînd $u(t,.)$ atinge valoarea a sau b. Acest fapt ne apare normal dacă ne gîndim la felul cum acționează aplicația multivocă ∂I_K. Acest exemplu a scos în evidență faptul că este natural să obținem o soluție care să verifice problema (3.1), (3.2), (3.3a), (sau (3.1) (3.2), (3.3b)) într-un sens mai slab dacă se impun condiții de tipul celor din Teorema 3.1 (respectiv din Teorema 3.3).

În încheierea acestei secțiuni dorim să ilustrăm modul în care se aplică rezultatele secțiunii 3.3 la exemplul de față. Ne limităm la enunțarea unui rezultat de existență care rezultă direct din Teorema 3.11.

Propoziția 3.13. *Presupunem îndeplinită condiția* (3.219). *Fie* $e \in W^{1,1}(0, T; L^2)(\mathbf{R}_+))$ *și* $u_0, v_0 \in H^1(\mathbf{R}_+)$ *astfel încît* $v_0(0) = R_0 u_0(0)$. *Atunci există o pereche unică* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *cu* $u, v \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbf{R}_+))$ *astfel încît pentru orice* $t \in [0, T[$ *avem*:

(i) $u(t,.), v(t,.) \in H^1(\mathbf{R}_+)$,

(ii) $u(t,.), v(t,.)$ *verifică sistemul*

Scanned with OKEN Scanner

$$L\frac{\partial^+ u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} + Ru(t,x) + e(t,x) = 0,$$

$$C\frac{\partial^+ v(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + Gv(t,x) = 0,$$

a.p.t. $x \in \mathbf{R}_+$,

și condițiile inițiale și la limită

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ x \in \mathbf{R}_+,$$

$$v(t,0) = R_0 u(t,0).$$

Observația 3.31. Ținînd seama de Observația 3.23, dacă se presupune doar că $e \in L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}_+))$ și $u_0, v_0 \in L^2(\mathbf{R}_+)$, atunci se obține doar o soluție slabă $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0, T]; L^2(\mathbf{R}_+)) \times C([0, T]; L^2(\mathbf{R}_+))$.

Comentarii bibliografice

Sistemele hiperbolice studiate în acest paragraf cu condiții la limită locale sau globale sînt frecvent întîlnite în fizică și tehnică. Exemplele prezentate mai sus reprezintă doar cîteva din problemele care apar în descrierea a variate fenomene dinamice. Dintre lucrările cu pronunțat caracter aplicativ existente în literatura matematică care se ocupă de asemenea probleme citățm doar cîteva : N. U. Ahmed [1], R. K. Brayton [1], R. K. Brayton și W. L. Miranker [1], R. K. Brayton și J. K. Moser [1], K. L. Cooke și D. W. Krumme [1], A. Halanay și V. Răsvan [1], E. F. Infante [1], M. Slemrod [3] din teoria rețelelor electrice și T. Dupont [1] care se ocupă de curgerea gazelor prin conducte; în același sens menționăm de asemenea cărțile de hidraulică semnate de W. Hsiung Li [1], V. L. Streeter și E. B. Wylie [1], ș.a. Pentru o bibliografie cuprinzătoare a lucrărilor cu caracter aplicativ care se ocupă de sisteme hiperbolice de tip (3.1) menționăm și monografia lui V. Răsvan [2]. Lucrări cu caracter abstract care se ocupă de sisteme hiperbolice de tip (3.1) sau înrudite cu acestea există puține în literatură. Astfel, A. E. Abolynia și A. D. Myškis [1] au studiat sisteme hiperbolice neliniare, cu condiții la limită de asemenea neliniare, dar în care termenii neliniari trebuiau să satisfacă condiții Lipschitz globale. J. L. Lions [2] a abordat sisteme hiperbolice neliniare înrudite cu cele studiate de noi. Se cuvine menționată aici și lucrarea semnată de C. Bardos și H. Brézis [1] care au studiat cu metode abstracte anumite probleme asociate unor sisteme hiperbolice asemănătoare cu (3.1) dar cu neliniarități particulare și cu condiții la limită liniare de un tip special. În prezent D. Petrovanu [1] se ocupă de problema existenței soluțiilor periodice pentru sisteme hiperbolice de tip 3.1. Într-o lucrare recentă, M. Štědrý [1] studiază de asemenea sisteme hiperbolice de tip (3.1) cu condiții periodice în raport cu timpul și condiții antiperiodice în raport cu variabila spațială. Mai menționăm lucrările semnate de J. Muszyński și J. Radzikowski [1] și J. Radzikowski și W. Sadkowski [1] în care se studiază sisteme hiperbolice de același tip cu diverse condiții la limită neliniare.

Scanned with OKEN Scanner

În lucrarea lui V. Iftimie [1] este tratată o problemă foarte apropiată de problema (3.1), (3.2), (3.3a) dar cu neliniarități speciale în sistem și în condițiile la limită (vezi și Exemplul 2 de mai sus). V. Barbu [5] este primul autor care demonstrează existența soluțiilor pentru problema (3.1), (3.2), (3.3a) prin intermediul teoriei operatorilor monotoni. Metoda folosită aici pentru demonstrarea existenței soluțiilor este diferită de cea dată de V. Barbu [5]. De altfel condițiile în care se lucrează diferă. Astfel, V. Barbu presupune că A și B sînt de forma

$$A = A(t, x, u) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t,x)\, A_1(x, u_1) \\ \gamma_2(t,x)\, A_2(x, u_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \gamma_n(t, x)\, A_n(x, u_n) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$B = B(t, x, v) = \begin{pmatrix} \delta_1(t, x)\, B_1(x, v_1) \\ \delta_2(t, x)\, B_2(x, v_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_n(t, x)\, B_n(x, v_n) \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

coeficienții α_i, β_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, depind de (t, x) iar L este o subdiferențială; atunci demonstrarea maximalității operatorului asociat revine la a arăta existența unei soluții optimale pentru o problemă de minimizare de tip Bolza. Menționăm că toate rezultatele expuse în prezentul paragraf sînt originale. Aceste rezultate se găsesc într-o formă mai mult sau mai puțin apropiată de cea din text în lucrările recente ale autorului [3, 7, 9, 10, 11, 12]. De remarcat că existența pentru o problemă de tip (3.1) (3.2), (3.3b) a mai fost tratată într-o lucrare aparținînd lui V. Barbu și autorului [13] dar tehnica folosită în prezenta lucrare este diferită. După cum s-a văzut, ideea centrală era de a „alipi" ecuațiile diferențiale care intervin în condițiile la limită la sistemul (3.1) și de a considera drept cadru funcțional spațiul produs $L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n) \times L^2(0,1\,;\,\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$. Această idee, de a adăuga un spațiu factor, a mai fost utilizată pentru alte probleme cu condiții la limită nelocale de R. B. Vinter [1] și J. Zabczyk [1,2].

În sfîrșit, se cuvine menționat faptul că în literatură se găsesc pe lîngă rezultate de existență și unele rezultate de comportare a soluțiilor cînd $t \to \infty$ în special în cazul sistemelor hiperbolice care descriu propagarea curentului prin liniile electrice: N. U. Ahmed [1], R. K. Brayton și W. L. Miranker [1], E. F. Infante [1], M. Slemrod [1] etc. De asemenea J. Radzikowski și W. Sadkowski [1] se ocupă de stabilitatea soluțiilor pentru sisteme hiperbolice de același tip cu condiții la limită neliniare folosind metoda clasică a funcției Liapunov. În cartea lui V. Răsvan [2] se studiază „stabilitatea absolută" a soluțiilor pentru diverse probleme, în particular fiind considerată și problema notată în text cu (3.216) — (3.218). În prezenta lucrare însă am analizat comportarea la infinit a soluțiilor în condiții diferite de cele în care lucrează autorii mai sus menționați și cu metode de asemenea complet diferite.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

A. E. ABOLYNIA și A. D. MYŠKIS
1. *Probleme mixte pentru sisteme hiperbolice cvasiliniare în plan*, Mat. Sbornik, **50(92)**, 4 (1960), 423—442 (în l. rusă).

R. A. ADAMS
1. *Sobolev spaces*, Academic Press, New York/San Francisco/London, 1975.

N. U. AHMED
1. *Stability analysis of a transmission line with variable parameters*, IEEE Trans. Circuits and Syst. 25 (1978), 878—885.

S. AIZICOVICI
1. *On an abstract Volterra equation*, în Vol. *Volterra Equations*, Lecture Notes in Math. 737, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.
2. *Spații de distribuții*, în vol. *Analiză neliniară și aplicații în mecanică* (Editor D. Pascali), Editura Academiei, București, 1977.

L. AMERIO și G. PROUSE
1. *Abstract almost periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold, New York/Cincinnati/Toronto/London/ Melbourne, 1971.

H. ATTOUCH
1. *On the maximality of the sum of two maximal monotone operators*, Nonlinear Anal., **5** (1981), 143—147.

J. B. BAILLON
1. *Comportement asymptotique des contractions et semi-groupes de contractions-Equations de Schrödinger non lineaires et divers*, Thèse, l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.
2. *Un exemple concernant le comportement asymptotique de la solution du problème* $\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u) \ni 0$, J. Funct. Anal., **28** (1978), 369—376.
3. *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, **283** (1976), 75—78.

J. B. BAILLON și A. HARAUX
1. *Comportement a l'infini pour les equations d'évolution avec forcing periodique*, Archive Rat. Mech. Anal., **67** (1977), 101—109.

J. B. BAILLON și H. BRÉZIS
1. *Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes non lineaires*, Houston J. Math., **2** (1976), 5—7.

J. B. BAILLON, R. E. BRUCK și S. REICH
1. *On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces*, Houston. J. Math., **4** (1978), 1—9.

V. BARBU
1. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Ed. Academiei, București — Noordhoff, Leyden, 1976.
2. *A semigroup aproach to an infinite delay equation in Hilbert spaces*, din vol. *Abstract Cauchy problems and functional differential equations* (F. Kappel & W. Schappacker, Eds.), Research Notes in Math. 48, Pitman, Boston/London/Melbourne, 1981.
3. *Ecuații diferențiale*, Iași, 1985.
4. *Nonlinear Volterra integro-differential equations in Hilbert spaces*, Conference Sem. Mat. Università di Bari, 1976.
5. *Nonlinear boundary-value problems for a class of hyperbolic systems*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **22** (1977), 155—168.
6. *Optimal control of variational inequalities*, Pitman, Boston/London/Melbourne, 1983.

V. BARBU și M. A. MALIK
1. *Semilinear integro-differential equations in Hilbert space*, J. Math. Appl., **67** (1979), 452—475.

Scanned with OKEN Scanner

M. G. CRANDALL, S.-O. LONDEN şi J. A. NOHEL
1. *An abstract nonlinear Volterra integrodifferential equation*, J. Math. Anal. Appl., **64** (1978), 701—735.
M. G. CRANDALL şi A. PAZY
1. *Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets*, J. Funct. Anal., **3** (1969), 376—418.
R. CRISTESCU
1. *Analiză funcţională*, Ed. didactică şi pedagogică, Ed. a III-a, Bucureşti, 1979.
C. DAFERMOS
1. *Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics*, din Vol. *Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics*, Lecture Notes in Math. 503, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.
2. *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations*, din vol. „*Nonlinear Evolution Equations*" (M. G. Crandall, Ed.), Academic Press, New York — San Francisco — London, 1978.
C. DAFERMOS şi M. SLEMROD
1. *Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 97—106.
H. DEBRUNNER şi P. FLOR,
1. *Ein Erweiterungssatz für monotone Mogen*, Archiv. Math., **15** (1964), 445—447.
I. DIAZ
1. *Anulacion de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Aplicaciones a ciertos problems parabolicos no lineales*, Preprint, Univ. Complutense de Madrid, 1978.
2. *Anulacion de soluciones para ciertos problemas parabolicos no lineales*, Rev. Real Acad. Ci. Exactas, Fis. y Nat. Madrid, **72** (1979), 613—616.
3. *Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabolicos no lineales: una clasificacion para los modelos de difusion del calor*, Memorias Real Acad. Ci. Exactos, Fis. y Nat. Madrid, **14** (1980), 43 p.
T. DUPONT
1. *Galerkin methods for modelling gas pipelines*, Lecture Notes in Math. **430**, p. 112—130, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/ New York, 1974.
G. DUVAUT şi J. L. LIONS
1. *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1976.
R. EDWARDS
1. *Analiză funcţională. Teorie şi aplicaţii*, Editura MIR, Moscova 1969 (în l. rusă).
G. GRIPENBERG
1. *On the asymptotic behaviour of nonlinear contraction semigroups*, Matematica Scandinavica, **44** (1979), 385—397.
A. HALANAY şi V. RĂSVAN
1. *Frequency domain conditions for forced oscillations in difference systems*, Rev. Roum. Sc. Techn Ser. Electrotechn. Energ., **24** (1979), 141—148.
A. HARAUX
1. *Equations d'évolution non linéaires: solutions bornées et périodiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **28** (1978), 201—220.
2. *Nonlinear evolution equations — Global behavior of solutions*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1981.
3. *Comportement à l'infini pour certains systèmes dissipatifs non lineaires*, Proc. Royal Soc. Edinburg, **84** A (1979), 213—234.
4. *Oscillations forcées pour certains systemes dissipatifs non linéaires*, Report Nr. 78010, Université Paris VI et CNRS, Paris, 1978.
5. *Comportement à l'infini pour une équation d'ondes non linéaire dissipative*, C. R. Acad. Sci. Paris, **287** (1978), 507—509.
6. *Comportement à l'infini pour une équation d'ondes non linéaire avec « forcing » périodique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **287** (1978), 619—621.
7. *Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires periodiques*, Report Nr. 78011, Université Paris VI et CNRS, Paris, 1978.
W. HSIUNG LI
1. *Differential equations of hydraulic transients, dispersion and groundwater flow*, Prentice-Hall, New Jersey, 1972.
V. IFTIMIE
1. *Sur un problème non linéaire pour un système hyperbolique*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **20** (1976), 303—328.

Scanned with OKEN Scanner

12. *Existence and regularity of solutions for a class of partial differential hyperbolic systems*, Proceedings of the Workshop on Differential Equations and Control Theory, Iași 1983.

J. MUSZYŃSKI și J. RADZIKOWSKI,
1. *Boundedness of solutions of some hyperbolic system*, Demonstratio Mathematica, **4** (1976), 747—761 (în l. rusă).

O. NEVANLINNA,
1. *Global iteration schemes for monotone operators*, Nonlinear Anal., **3** (1979), 505—514.

O. NEVANLINNA și S. REICH,
1. *Strong convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces*, Israel J. Math., **32** (1979), 44—58.

M. NICOLESCU,
1. *Manual de analiză matematică*, vol. II, Ed. did. și ped. București, 1964.

H. OKOCHI,
1. *Strong convergence of nonlinear contraction semigroups*, Proc. Japan Acad., **56** (1980), 83—84.

D. PASCALI și S. SBURLAN,
1. *Nonlinear mappings of monotone type*, Sijthoff § Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1978.

G. PASSTY,
1. *Convergence of the averages of a resolvent iteration in Hilbert space*, nepublicată (1978).
2. *Preservation of the asymptotic behavior of a nonlinear contraction semigroup by backward differencing*, va apărea în Houston J. Math.
3. *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., **72** (1979), 383—390.

N. PAVEL,
1. *Ecuații diferențiale asociate unor operatori neliniari pe spații Banach*, Editura Academiei, București, 1977.
2. *Analysis of some nonlinear problems in Banach spaces and applications*, Litografia Universității „Al. I. Cuza" Iași, 1982.

A. PAZY,
1. *On the asymptotic behavior of semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space*, J. Funct. Anal., **27** (1978), 292—307.
2. *On the asymptotic behaviour of iterates of nonexpansive mappings in Hilbert space*, Israel J. Math., **26** (1977), 197—204.
3. *Semigroups of nonlinear contractions and their asymptotic behaviour*, din vol. „*Nonlinear analysis and mechanics*: Heriot-Wat Symposium", vol. III, Research Notes in Math. 30, Pitman, London — San Francisco—Melbourne, 1979.
4. *The asymptotic behaviour of semigroup of nonlinear contractions having large sets of fixed points*, Proc. Royal Soc. Edinburg 80—A (1978), 261—271.
5. *Strong convergence of semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space*, J. d'Analyse Math., **34** (1978), 1—35.
6. *Remarks on nonlinear ergodic theory in Hilbert space*, Nonlinear Anal., **3** (1979), 863—871.
7. *The Lyapunov method for semigroups of nonlinear contractions in Banach spaces*, va apărea în J. d'Analyse Math.

D. PETROVANU
1. *Periodic solutions for the firt order telegraph equations*, va apărea.

G. H. PIMBLEY, JR. și B. NICOLAENKO
1. *Some conditions for weak convergence to equilibrium of nonlinear contraction semigroups*, J. Diff. Equations, **29** (1978), 269—277.

J. RADZIKOWSKI și W. SADKOWSKI,
1. *Behaviour of solutions of some hyperbolic systems with nonlinear boundary conditions*, Demonstratio Mathematica, **14** (1981), 437—457.

V. RĂSVAN
1. *Stabilitatea absolută a sistemelor automate cu întîrziere*, Editura Academiei, București, 1975.

S. REICH
1. *Asymptotic behavior of resolvents in Banach spaces*, Atti Accad. Naz Lincei, **67** (1979), 27—30.
2. *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287—292.
3. *On the asymptotic behavior of onlinear semigroups and the range of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., **79** (1981), 113—126.
4. *On infinite products of resolvents*, Atti Accad. Naz. Lincei, **58** (1977), 338—340.

Scanned with OKEN Scanner

CONTENTS

INTRODUCTION 9

Chapter 0

PRELIMINARIES TO FUNCTIONAL ANALYSIS

§ 1. **Usual topologies on Banach spaces.** 11

§ 2. **The $L^p(\Omega; X)$ spaces** 13

§ 3. **Scalar distributions. Sobolev spaces** 13

§ 4. **Vectorial distributions. The spaces $W^{k,p}(a, b, X)$.** 15

§ 5. **Measures.** 16

Chapter I

ELEMENTS OF NONLINEAR ANALYSIS

§ 1. **Monotone operators. Convex functions** 18

1.1. Monotone operators. 18

1.2. Convex functions. The subdifferential. 26

§ 2. **Existence and regularity of solutions for evolution equations in Hilbert spaces** . . 34

Chapter II

STABILITY OF SOLUTIONS OF EVOLUTION EQUATIONS IN HILBERT SPACES

§ 1. **Boundedness of solutions on half-axis. Weak convergence in the topology of solutions or of their averages, as $t \to \infty$** 47

1.1. Solutions bounded on half-axis. Weak convergence of averages. 47

1.2. A comparison theorem. 52

1.3. Necessary and sufficient conditions for weak convergence. 53

1.4. Sufficient conditions for weak convergence.. 54

1.5. Some comments 59

1.6. Solutions with a sublinear growth. 60

§ 2. **Strong convergence in the topology of solutions or of their averages, as $t \to \infty$.** . . 64

2.1. Strong convergence of averages in the odd case. 64

2.2. Sufficient conditions for strong convergence of solutions. 68

2.3. Properties of ω-limit sets. 75

2.4. Solutions with compact support. 86

§ 3. **Finite-difference schemes for approximation of solutions to the equation $0 \in A(u)$.** 87

3.1. First-order finite-difference schemes. 88

3.2. Second-order finite-difference schemes. 99

§ 4. **Ad infinitum behaviour of solutions in the case of periodic forcing. Asymptotic dosing problem.** 104

Scanned with OKEN Scanner

4.1. Periodic forcing 104
4.2. Asymptotic dosing problem 109
Bibliographical comments 116

Chapter III

APPLICATIONS

§ 1. **An infinite delay equation** 118
§ 2. **The nonlinear wave equation** 129
§ 3. **A class of partial differential systems of hyperbolic type** 138
3.1. Existence and regularity results 139
3.2. Asymptotic behaviour of solutions 166
3.3. The investigation of the cases when the spa ce variable lies in $\mathbf{R}_+$ or $\mathbf{R}$ . . . 185
3.4. Examples 189

Bibliographical comments 198

References 201

Se prezintă, mai întîi, cîteva elemente de analiză funcțională, dîndu-se, totodată, și proprietățile de bază ale operatorilor monotoni și ale funcțiilor convexe, precum și rezultatele fundamentale referitoare la existența soluțiilor pentru ecuații neliniare de evoluție de tip monoton pe spații Hilbert.

În continuare, se expun principalele rezultate cunoscute în teoria stabilității și comportării la infinit a soluțiilor ecuațiilor de evoluție asociate operatorilor monotoni.

În încheiere, un capitol este consacrat analizei în detaliu a cîtorva aplicații, insistîndu-se atît asupra existenței soluțiilor, cît și asupra regularității și comportării asimptotice a acestora.

Lei 17,50

Scanned with OKEN Scanner